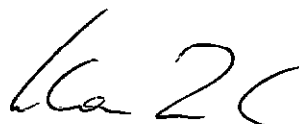


# MEJORAMIENTO DE UN SISTEMA MECANICO POR CONTROL ACTIVO

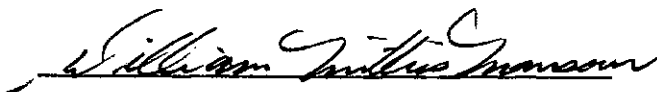
Manuel Antonio Murillo Sánchez

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovada por:



Presidente



RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
JUNHO DE 1973

A mi Esposa

A mis Padres

## AGRADECIMIENTO

Deseo agradecer profundamente al señor Dr. Hans Ingo Weber su valiosa ayuda brindada con la orientación de este trabajo.

Quiero hacer extensivo mi agradecimiento, al laboratorio de simulación de sistemas de COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, por todas las facilidades brindadas.

Además agradezco a la Organización de los Estados Americanos y a la Universidad de Costa Rica, el haberme otorgado una beca para realizar estudios de Post-grado en el Brasil.

## R E S U M E N

Se estudia en este trabajo la mejoría obtenida en el comportamiento de un sistema mecánico discreto, del tipo tradicional, es decir constituido por masas, resortes y amortiguadores, al cual se le introduce un elemento activo, por ejemplo un servomecanismo.

El funcionamiento de este elemento está condicionado a una ley de control, la cual se puede determinar por varios métodos.

Este trabajo examina primordialmente el caso en que exista una proporcionalidad entre el vector de control y las aceleraciones del sistema. Normalmente la aceleración es la cantidad que se mide más fácilmente, en una forma absoluta, en un sistema mecánico.

El efecto obtenido con este vector de control, es un aumento aparente de las masas, disminuyendo su frecuencia natural y la razón de amortiguamiento, mejorando de esta forma el comportamiento del sistema bajo la acción de perturbaciones externas.

Se analizó particularmente el sistema de suspensión de un automóvil, donde se observaron mejorías del orden de 70% en el comportamiento del cuerpo del automóvil. También se estudiaron algunas implicaciones directas producidas por el control, tal como el factor de carga sobre la rueda.

## R E S U M O

Estuda-se a melhoria obtida no comportamento dinâmico de um sistema mecânico discreto, do tipo tradicional, isto é, constituído por massas, molas e amortecedores, ao qual se lhe acrescenta um elemento ativo, por exemplo, um motor posicionador.

O funcionamento desse elemento está condicionado a uma lei de controle para cuja determinação existe uma série de métodos. Este trabalho examina primordialmente o caso em que haja uma proporcionalidade entre o vetor controle e as acelerações do sistema. Normalmente esta é a grandeza mais facilmente mensurável em um sistema mecânico.

O efeito obtido é um aumento aparente das massas, diminuindo sua frequência natural e sua taxa de amortecimento melhorando o comportamento do sistema ante as perturbações externas.

É analisado particularmente o caso da suspensão de um veículo, onde se podem observar melhoras da ordem de 70% no "conforto" na massa suspensa. São estudadas também as outras implicações diretas desse controle em várias situações, como o fator da carga na roda.

## S U M M A R Y

In this work the suspension of an automobile car is investigated for the possibility of improving its dynamics by the addition of an active element. The system is simulated by idealized masses, springs and dashpots. The proposed active component is visualized as a servo mechanism or a force transducer which receives one of the variables of the system as an input and yields a control signal according to a prescribed law. The latter is fed back to the system in a specific manner.

In this investigation, the input to the active element, is taken as the acceleration of the primary mass whose dynamics has to be improved. This choice is feasible because of the ease with which such a variable can be measured in an actual system.

Control signals obeying other laws are also possible but they are not covered here.

The proposed control law affects the system increasing the sprung mass in an apparent way, decreasing in this manner its natural frequency and damping ratio. This carries out an improvement of the behaviour of the system under external disturbances.

The results of this investigation show a noticeable improvement on the amplitude of Jerk in the order of 70% with a careful selection of some of the parameters.

## C O N T E N I D O

### I - INTRODUCCIÓN

|   |    |
|---|----|
| 1.1 - Objetivo .....                          | 1. |
| 1.2 - Trabajos Anteriores .....               | 1. |
| 1.3 - Ordenamiento del Presente Trabajo ..... | 2. |

### II - ANALISIS DEL SISTEMA ACTIVO Y DEL PASIVO

|  |     |
|--|-----|
| 2.1 - Generalidades .....                      | 4.  |
| 2.2 - Modelos Físicos del Sistema Pasivo ..... | 5.  |
| 2.3 - Concepto del Sistema Activo .....        | 8.  |
| 2.4 - Dinámica del Sistema Activo .....        | 10. |

### III - OBSERVABILIDAD Y CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA ACTIVO

|   |     |
|---|-----|
| 3.1 - Introducción .....  | 16. |
| 3.2 - Representación en el Espacio de Estados .....                               | 16. |
| 3.3 - Obtención de las Ecuaciones de Movimiento en el<br>Espacio de Estados ..... | 20. |
| 3.4 - Concepto de Observabilidad .....  | 23. |
| 3.5 - Concepto de Controlabilidad .....   | 23. |
| 3.6 - Controlabilidad del Sistema Activo .....                                    | 24. |
| 3.7 - Observabilidad del Sistema Activo .....                                     | 25. |
| 3.8 - Conclusiones .....  | 27. |

### IV - LA LEY DE CONTROL

|   |     |
|---|-----|
| 4.1 - Introducción .....                                | 28. |
| 4.2 - Condiciones que Debe Tener un Buen Sistema Pasivo | 28. |
| 4.3 - Limitaciones en la Mejoría del Sistema Pasivo ... | 31. |
| 4.4 - Escogencia de la Ley de Control .....             | 33. |
| 4.5 - Conclusión sobre la Ley de Control .....          | 36. |

V - ESTABILIDAD DEL SISTEMA ACTIVO

|   |     |
|---|-----|
| 5.1 - Introducción .....  | 38. |
| 5.2 - Criterios para Determinar la Estabilidad de un Sistema .....  | 39. |
| 5.3 - Estabilidad del Sistema Activo con la Ley de Control $U = a\ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ .....                     | 42. |
| 5.4 - Conclusiones sobre la Estabilidad del Sistema Activo Usando el Control $U(t) = a\ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ .... | 52. |

VI - ESTUDIO ANALITICO-NUMERICO DE LA INFLUENCIA DE LA LEY DE CONTROL

|   |     |
|---|-----|
| 6.1 - Introducción .....  | 54. |
| 6.2 - Criterio de Optimización .....  | 54. |
| 6.3 - Optimización Analítica de la Ley de Control $U = \gamma \ddot{x}_1$ .....                     | 55. |
| 6.4 - Disminución de la Frecuencia Natural de la Masa Principal y su Razón de Amortiguamiento ..... | 61. |
| 6.5 - Fuerza sobre la Rueda .....   | 62. |
| 6.6 - Análisis Numérico del Sistema Activo con la Ley de Control $U = \gamma \ddot{x}_1$ .          |     |
| 6.7 - Conclusión sobre los Resultados Analítico-Numéricos .....                                     | 82. |

VII - SIMULACION DEL SISTEMA EN EL COMPUTADOR ANALOGICO

|  |     |
|--|-----|
| 7.1 - Introducción .....   | 84. |
| 7.2 - Escogencia de la Ley de Control .....  | 84. |
| 7.3 - Diagrama de Flujo para el Computador Analógico ..  | 85. |
| 7.4 - Análisis de la Estabilidad del Sistema .....   | 90. |
| 7.5 - El porque de la Inestabilidad en $\gamma = 2.73$ .....                                     | 92. |
| 7.6 - Optimización en el Computador Analógico de la Ley de Control $U = \gamma \ddot{x}_1$ ..... | 94. |



|  |      |
|--|------|
| 7.7 - Variación de los Valores Máximos de las Variables "Características" Contra la Frecuencia de Excitación ..... | 95.  |
| 7.8 - Curvas de las Variables Características de la Masa Principal como Función del Tiempo .....                   | 100. |
| 7.9 - Sistema Sometido a una Excitación Externa, y a una Condición Inicial .....                                   | 106. |
| 7.10- Conclusion .....   | 106. |

#### VIII- CONCLUSIONES, DISCUSION, RECOMENDACIONES

|                             |      |
|-----------------------------|------|
| 8.1 - Conclusiones .....    | 108. |
| 8.2 - Discusión .....       | 111. |
| 8.3 - Recomendaciones ..... | 115. |

|                   |      |
|-------------------|------|
| REFERENCIAS ..... | 119. |
|-------------------|------|

## I - INTRODUCCION

### 1.1 - Objetivo

El presente trabajo tiene como objetivo, el estudio de la posibilidad de mejorar el comportamiento de un sistema mecánico pasivo, cambiándolo por un sistema activo controlado.

Cuando se habla en el comportamiento de un sistema, tácitamente se estará refiriendo al comportamiento dinámico de una masa particular del mismo, la cual se desea estabilizar de las perturbaciones externas a que pueda estar sometido el sistema. A esta masa se la designará como masa principal, o cuerpo principal del sistema.

El trabajo se basa en el análisis de la suspensión de un automovil, pero la idea de controlar un sistema pasivo, convirtiéndolo en activo para mejorar su comportamiento, puede extenderse a cualquier cuerpo que se deseé aislar de perturbaciones externas.

### 1.2 - Trabajos Anteriores

La idea de convertir un sistema mecánico pasivo en activo para mejorar su comportamiento, no es cosa muy nueva.

Se han hecho estudios sobre el asunto desde hace unos 40 años, especialmente en sistemas de suspensión de automoviles y trenes. El desarrollo actual en este sentido, está dirigido a la investigación espacial, trenes de alta velocidad, y sistemas mecánicos funcionando en el límite de lo posible.

Las compañías fabricantes de automoviles, por ejemplo, se han dedicado con ahínco al estudio del problema de la suspensión de sus vehículos. Mucho del trabajo realizado en este campo ha sido en forma empírica.

En los últimos años se han hecho estudios teóricos en este campo, habiendo sido publicados varios artículos sobre el mismo. Vease por ejemplo [9], [11], [15].

Se han realizado bastantes estudios prácticos en este sentido, incluyendo modelos experimentales, pero nunca se ha logrado introducir suspensión controlada en gran escala, debido a su alto costo, a los vehículos comerciales; pero si ha sido experimentada en vehículos militares.

En el presente trabajo se presenta un encaramiento un tanto diferente a la mayoría de los trabajos ya realizados. Se pretende conseguir un mejoramiento en el sistema de suspensión de un automovil, de la manera más simple posible, con una orientación netamente práctica, considerando así en un futuro la introducción en gran escala de la suspensión controlada, en los vehículos comerciales.

### 1.3 - Ordenamiento del Presente Trabajo

En el capítulo II se hace un análisis de los sistemas pasivo y activo, se dan las definiciones pertinentes, los modelos físicos y matemáticos del sistema mecánico.

En el capítulo III se hace un análisis de la observabilidad y controlabilidad del sistema, es decir se verifica si

es posible medir todas las cantidades, necesarias para la ley de control, y si ésta lleva el sistema a posiciones deseadas. Se dan las definiciones pertinentes.

En el capítulo IV se discute como hacer funcionar el elemento posicionador (Servomecanismo), esto es, como debe escogerse el vector de control, que condiciones debe llenar este vector. Se da una conclusión sobre la ley de control.

En el capítulo V se discute la estabilidad del sistema, pues no está asegurada la estabilidad con el vector de control escogido. Se analiza la estabilidad en una forma analítica; estudiando las raíces de la ecuación característica y también usando el criterio de Routh. Se da una conclusión definitiva sobre la estabilidad del sistema.

En el capítulo VI, se optimiza el vector de control escogido, se lo hace en una forma analítico-numérica. En esta sección se resuelven analíticamente las ecuaciones de movimiento del sistema. Se analiza el comportamiento de la rueda.

En el capítulo VII se presenta la simulación del sistema en un computador analógico (EAI-TR-48), se halla el vector de control, se analiza la estabilidad, se optimiza el vector de control. Se presentan gráficas de todas las variables de importancia como función de diferentes parámetros.

En el capítulo VIII se dan las conclusiones finales sobre este trabajo, se discuten algunos problemas que eventualmente aparecen en la práctica. Se dan algunas recomendaciones para una posible continuación de este trabajo.

## II - ANALISIS DEL SISTEMA PASIVO Y DEL ACTIVO

### 2.1 - Generalidades

El análisis presentado en este trabajo se va a concentrar en el estudio de la suspensión de un automovil, dejando en claro que el presente estudio puede también hacerse con cualquier otro sistema macánico similar.

La idea de introducir un sistema de suspensión estabilizador en un automovil, sigue dos propósitos básicos.

En primer lugar se quiere conseguir un alto grado de comodidad para los pasajeros dentro del automovil; es decir, se quiere aislar la masa principal de los disturbios externos, tales como los producidos por las irregularidades de los caminos, desbalance en las ruedas, etc.

El segundo propósito, impone la restricción de que las ruedas no pierdan el contacto con el suelo en condiciones drásticas, tales como frenar, acelerar, tomar curvas o brincar sobre el suelo.

Otra condición que debe cumplir un buen sistema de suspensión, es la conservación de los caminos; se debe tener un sistema de suspensión tal que no destruya los caminos.

El sistema de suspensión de un automovil es un sistema altamente complejo, que puede tener hasta 18 grados de libertad. |2|\*.

---

\* Los números entre barras se refieren a la bibliografía presentada al final de este trabajo

Por lo general, todos los estudios realizados para mejorar un sistema de suspensión de automóvil, han sido en alto grado empíricos, principalmente en lo que se refiere al estudio de los amortiguadores, habiéndose conseguido muchos adelantos en esta forma, ver [11].

Ultimamente han aparecido estudios analíticos sobre el mejoramiento de un sistema de suspensión de automóvil, ver [15]; actualmente se continua investigando en este sentido.

## 2.2 - Modelos Físicos del Sistema Pasivo

En la sección anterior se mencionó la complejidad del sistema de suspensión de un automóvil, que puede alcanzar hasta 18 grados de libertad.

Estudiar un sistema tan complejo es bastante difícil; pudiéndose obtener resultados razonables con un sistema más simple y de más fácil acceso matemático.

Ha sido costumbre de todos los autores que estudian este asunto simplificar el sistema de la suspensión de un automóvil, a un sistema de solo dos grados de libertad; tomando una sola rueda, y la cuarta parte de la masa del cuerpo principal.

Además se restringe el movimiento de la masa principal y de la rueda a un solo movimiento vertical.

Este modelo simplificado representa en buena parte el sistema más complejo, siendo razonablemente válido para el estudio del problema de suspensión.

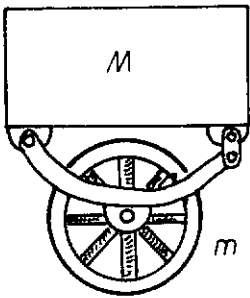
Un buen comparativo de diversos modelos de vehícu-

los se puede encontrar en [21].

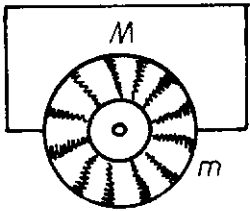
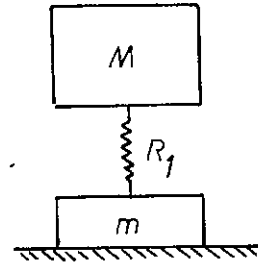
En la figura 2.1 se presentan algunos sistemas de suspensión usados en la práctica, con sus respectivos modelos físicos.

SUSPENSION REAL

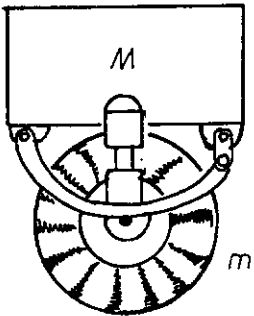
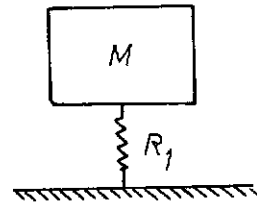
MODELO FISICO ESQUEMATICO



(a)



(b)



(c)

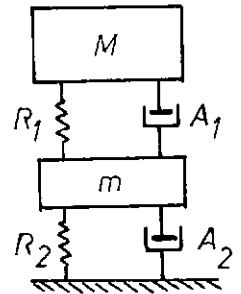
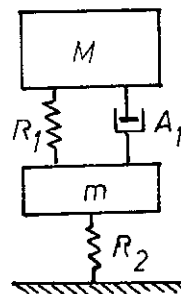


Figura 2.1 - Algunos tipos de suspensión con sus respectivos modelos físicos.

En la figura 2.1  $M$  representa la masa principal,  $m$  representa la masa de la rueda,  $R_1$  representa el resorte que acopla la masa principal con las ruedas,  $R_2$  representa el resorte equivalente de la rueda,  $A_1$ , es el amortiguador que acopla la rueda con la masa principal y  $A_2$  representa el amortiguamiento equivalente de la rueda.

De los sistemas mostrados en la figura 2.1, el mostrado en 2.1c, es el más usado en los sistemas de suspensión de vehículos, fundamentalmente en aquellos vehículos que se movilizan a velocidades relativamente altas, tal como el caso de los automoviles.

En este caso el amortiguamiento del neumático frecuentemente se desprecia, pues es pequeño comparado con los otros parámetros, quedando el modelo físico de la suspensión de un automovil reducido al mostrado en la figura 2.2

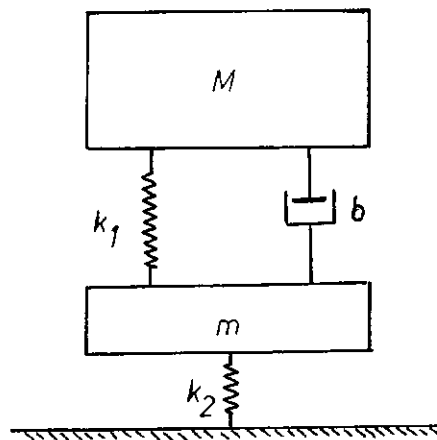


Figura 2.2 - Modelo físico simplificado que representa la suspensión de un automovil.



El modelo físico representado en la figura 2.2 es el modelo usado por la mayoría de los autores que se dedican a investigar este campo, considerado como un buen modelo físico representativo de un sistema de suspensión. Nótese que en este modelo, y también en los mostrados en la figura 2.1, el resorte que representa la elasticidad de la rueda se ha sujetado a la base, ésto obliga a que la rueda del vehículo permanezca en constante contacto con el suelo. Esto establece ciertos límites de carga dinámica a que el sistema puede estar sujeto.

### 2.3 - Concepto del Sistema Activo

En la sección anterior se mostraron algunos sistemas representativos de una suspensión de automóvil, estos sistemas son del tipo conocido como pasivo, pues el sistema no sufre una adaptación en su estructura con la acción de perturbaciones externas; a este sistema se lo puede denominar de parámetros constantes.

Por otro lado, si se tiene un sistema que sea modificable de una u otra manera; por ejemplo con una señal de realimentación de la masa principal ( $M$ ) ; a este sistema se lo llamará de activo, y puede considerarse como un sistema con inteligencia. Una mejor interpretación del sistema activo se consigue con un esquema, tal como el mostrado en la figura 2.3

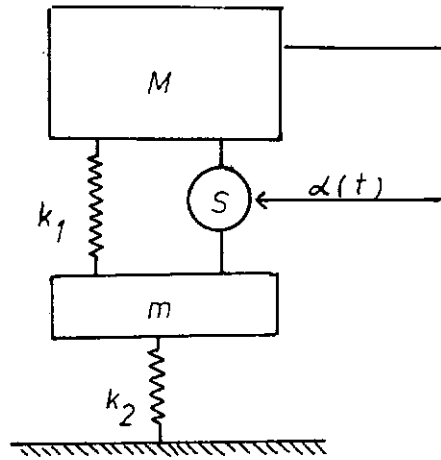


Figura 2.3 - Modelo físico de un sistema de suspensión activo

En la figura 2.3, que es un ejemplo de un sistema activo para el sistema mostrado en la figura 2.2, (S) es un servo mecanismo, que puede ser de cualquier tipo que produzca una fuerza (F) , al recibir una señal  $\alpha(t)$  , que se manifiesta en la masa principal (M) , que es la masa que se desea estabilizar.

Evidentemente, la fuerza (F) producida por el servomecanismo será en este ejemplo, función de la señal de realimentación, es decir

$$F = f (\alpha(t)) \quad (2.1)$$

Donde

F = fuerza producida por el servomecanismo

$\alpha(t)$  = señal genérica dependiente del tiempo, manifestada en la masa principal

f = representación de función

La señal ( $\alpha(t)$ ) no tiene necesariamente que ser una señal manifestada en la masa principal, puede ser cualquier señal manifestada en cualquier masa del sistema, o una combinación de señales.

En el ejemplo mostrado en la figura 2.3, se toma una señal de la masa principal para introducirla luego al sistema, de tal forma que cambia el comportamiento del sistema para estabilizar la masa principal. Este es el concepto de realimentación, que da origen a un sistema activo controlado.

#### 2.4 - Dinámica del Sistema Activo

##### Ecuaciones de movimiento

Para encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema activo, se toma el modelo físico correspondiente; se aplica el principio de D'Alembert, o la segunda ley de Newton, haciendo la suma total de fuerzas dinámicas y estáticas. En la figura 2.4 se muestra el modelo físico, y los diagramas de cuerpo libre, usados para obtener el modelo matemático del sistema (ecuaciones de movimiento)

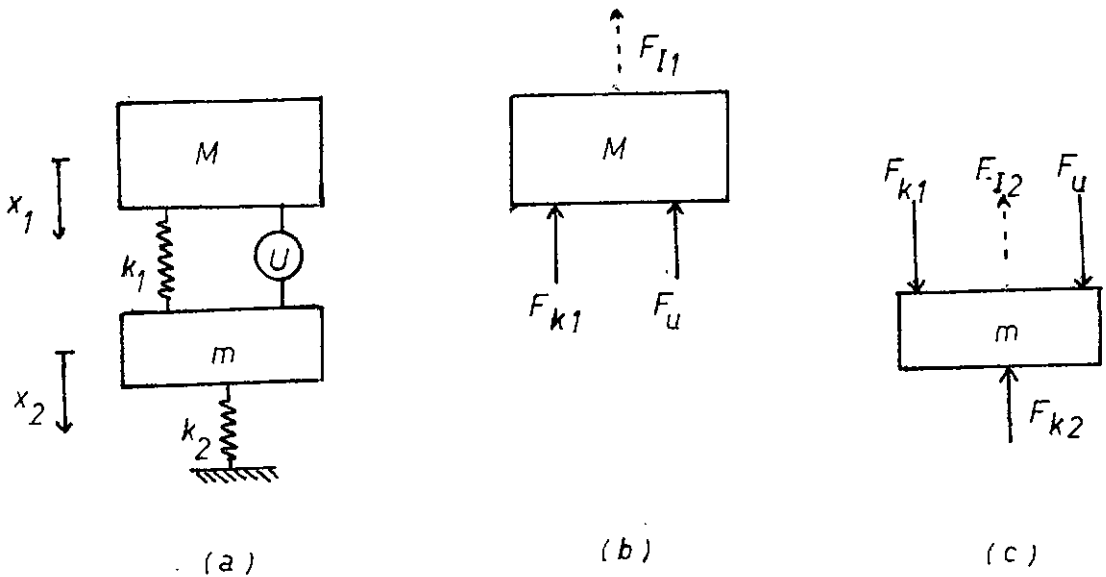


Figura 2.4 - Modelo físico del sistema activo, y diagramas del cuerpo libre.

En el modelo físico mostrado en la figura 2.3 y 2.4a, se puede observar que se ha dejado el resorte acoplador entre las dos masas, y se ha incluido el amortiguador en el servomecanismo.

La justificación teórica puede encontrarse en [17]. Además existe una justificación física que radica en las condiciones de diseño que debe tener un sistema de suspensión controlado, entre las cuales están, ver [15]:

- La masa principal necesita una fuerza de retorno, de otra manera el sistema se tornaría inestable.
- La sensibilidad del sistema a carga estática debe permanecer inalterada, no se deben quitar ni cambiar los resortes del sistema pasivo.

c) Las ruedas deben permanecer con amortiguamiento.

d) El sistema pasivo, al ser convertido en activo debe sufrir el mínimo de modificaciones.

Aclarado este punto, y observando las figuras 2.4b y 2.4c, se hace el equilibrio de todas las fuerzas (estáticas y dinámicas); esto da origen a las dos ecuaciones de movimiento. Formalmente se sigue:

$$F_{k_1} + F_u + M \ddot{x}_1 = 0 \quad (2.2a)$$

$$- F_{k_1} - F_u + F_{k_2} + m \ddot{x}_2 = 0 \quad (2.2b)$$

Donde

$$F_{k_1} = k_1 (x_1 - x_2)$$

$$F_{k_2} = k_2 x_2$$

$$F_u = a U(t)$$

Teniéndose la siguiente nomenclatura

$a$  = constante

$M$  = masa principal

$m$  = masa de la rueda

$k_1$  = constante del resorte acoplador

$k_2$  = constante del resorte equivalente de la rueda

$U(t)$  = vector de control

$x_1(t)$  = coordenada de la masa principal referida a la posición de equilibrio

$x_2(t)$  = coordenada de la rueda referida a la posición de equilibrio

Sustituyendo (2.3) en (2.2) se obtiene:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k_1}{M} (x_1 - x_2) - \frac{a}{M} U(t) \quad (2.4a)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{k_1}{m} (x_1 - x_2) - \frac{k_2}{m} x_2 + \frac{a}{m} U(t) \quad (2.4b)$$

Definiendo para efectos de normalización los siguientes términos:

$$\beta = \frac{k_1}{k_2} \quad \text{Razón de constantes de resorte} \quad (2.5a)$$

$$\alpha = \frac{m}{M} \quad \text{Razón de masas, rueda/principal} \quad (2.5b)$$

$$\omega_2 = \frac{k_2}{m} \quad \text{Frecuencia natural de la rueda} \quad (2.5c)$$

$$\tau = \omega_2 t \quad \text{Tiempo adimensional} \quad (2.5d)$$

$$\gamma = \frac{a}{M} \quad \text{Constante de control} \quad (2.5e)$$

$$b = 2m\zeta\omega_2 \quad \text{Amortiguamiento} \quad (2.5f)$$

$$x_1 = \frac{x_1}{L} \quad \text{Variable adimensional} \quad (2.5g)$$

$$x_2 = \frac{x_2}{L} \quad \text{variable adimensional} \quad (2.5h)$$

$$L = \quad \text{Longitud arbitraria de normalización} \quad (2.5i)$$

$$\zeta = \quad \text{Factor de amortiguamiento} \quad (2.5j)$$

Sustituyendo (2.5) en (2.4), se llega a la siguiente expresión normalizada (adimensional) para las ecuaciones de movimiento

$$x_1'' = -\beta\alpha (x_1 - x_2) - \gamma U(t) \quad (2.6a)$$

$$x_2'' = \beta (x_1 - x_2) - x_2 + \frac{\gamma}{\alpha} U(t) \quad (2.6b)$$

Obsérvese que  $x'$  es la derivada respecto a  $\tau$  y no a  $t$ .

Las ecuaciones (2.6) son las ecuaciones de movimiento del sistema activo, expresadas en una forma adimensional, para facilitar su posterior manipulación matemática.

En forma matricial las ecuaciones (2.6) se pueden escribir de la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta\alpha & \beta\alpha \\ \beta & -(\beta + 1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\gamma \\ \frac{\gamma}{\alpha} \end{Bmatrix} \{U(t)\} \quad (2.7)$$

Que tiene la forma.

$$[M] \{X''\} = [\bar{A}] \{X\} + [B] \{U(t)\} \quad (2.8)$$

Donde la matriz  $[\bar{A}]$  para un sistema mecánico correspondería a la matriz  $- [k]$ , matriz de fuerzas elásticas.

La ecuación (2.7) resume las ecuaciones de movimiento del sistema.

El sistema mecánico descrito por las ecuaciones (2.6) o (2.7), puede ser puesto a vibrar de dos maneras, a saber:

- a) Con una condición inicial cualquiera en cualquier masa. Generalmente se estudia el sistema con una condición inicial de desplazamiento en la rueda, lo que equivale a un agujero o un obstáculo en el camino.
- b) Una excitación periódica o aleatoria externa. Evidentemente esta significa una excitación producida por el camino sobre la rueda. Para fines de análisis esta excitación externa se supondrá sinusoidal:

$$f(t) = y_0 \sin \omega t \quad (2.9)$$

Donde

$$f(t) = \text{excitación externa}$$

$\omega$  = frecuencia de la excitación, proporcional a la velocidad del vehículo.



### III - OBSERVABILIDAD Y CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA ACTIVO

#### 3.1 - Introducción

Los conceptos de observabilidad y controlabilidad son fundamentales en el estudio de un sistema que se quiera controlar.

Si se tiene un sistema, el cual se quiere controlar, cabe primero que nada preguntarse.. Es el sistema observable? Es el sistema controlable?

Siendo la observabilidad la propiedad que debe tener un sistema, tal que conociendo las causas que afectan el sistema, y conociendo los efectos que salen del sistema, se conoce completamente el estado del sistema.

Y siendo la controlabilidad aquella propiedad que tiene un sistema tal que se puede cambiar el estado del sistema en una determinada manera.

Posteriormente se definirá en una forma rigurosa el concepto de observabilidad y controlabilidad, además se hará un análisis de la observabilidad y controlabilidad del sistema; para tal fin se transforman las ecuaciones de movimiento (2.7), a una forma conocida como "Representación espacio-estado".

#### 3.2 - Representación en el Espacio de Estados

Antes de obtener esta representación se van a definir algunos conceptos: [18].

### Definición

Un sistema puede ser imaginado como un elemento que siendo sometido a ciertas sollicitaciones (entradas), responde con un cierto comportamiento (salida), ver fig. 3.1.

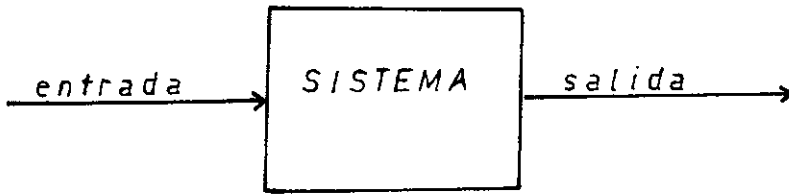


Figura 3.1 - Representación esquemática de un sistema

### Definición

El estado de un objeto físico, es aquella propiedad del objeto, tal que, conocida una entrada, (que es función del tiempo) en un dado instante  $t_0$ , se tendrá completamente determinada la salida para un instante después  $t$ , tal que  $t \geq t_0$ .

### Definición

El estado de un objeto abstracto, (modelo matemático del objeto físico), es aquella colección de números, que junto con la entrada, para cualquier  $t > t_0$  determina en una forma única la salida  $Z(t)$  para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ .

### Definición

Una variable de estado denotada por  $Y(t)$  es aquella función del tiempo, cuyo valor en cualquier instante, es el estado de un objeto abstracto para dicho instante.

### Definición

El espacio de estados, es el conjunto de todas las variables de estado  $Y(t)$ .

Para aclarar bien el concepto de la Representación en el espacio de los estados, nada mejor que un esquema, tal como el mostrado en la figura 3.2

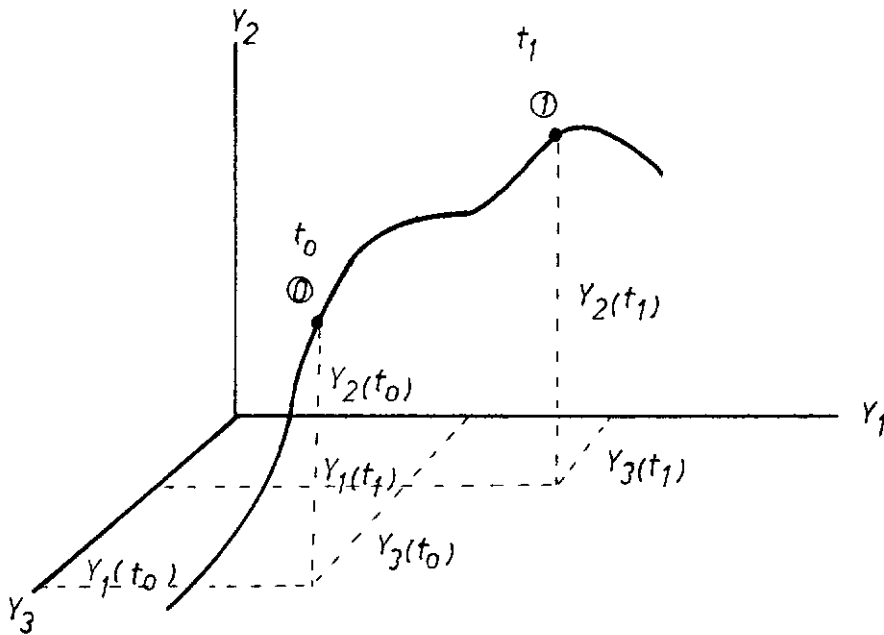


Figura 3.2 - Representación de las variables de estado  $Y(t)$

En la figura 3.2 se observa una representación en el espacio de estados. En el instante  $t_0$ , los estados del sistema

son  $Y_1(t_0)$ ,  $Y_2(t_0)$  y  $Y_3(t_0)$ . En el instante  $t_1$  los estados son  $Y_1(t_1)$ ,  $Y_2(t_1)$  y  $Y_3(t_1)$ . Debe cumplirse lo siguiente: conocida una entrada  $U(t)$  que cambia el sistema del estado ② al estado ①, y conocido el estado ②, el estado ① estará determinado en una forma única.

Para el caso de sistemas dinámicos, descritos por ecuaciones diferenciales de segunda orden, las variables de estado  $Y_1(t)$  y  $Y_2(t)$  se identifican respectivamente con la posición,  $x$  y la velocidad,  $\dot{x}$ .

Una representación en el espacio de estados para un sistema dinámico, queda especificada en su forma más general por las siguientes ecuaciones matriciales [18].

$$\{\dot{Y}\} = [A] \{Y\} + [B] \{U\} \quad (3.1a)$$

$$\{Z\} = [C] \{Y\} + [D] \{U\} \quad (3.1b)$$

Donde

$\{Y\}$  vector de estado de dimensión  $(n)$

$\{Z\}$  vector de salida, o vector de medida  $(m)$

$\{U\}$  vector de control  $(r)$

$[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  y  $[D]$  matrices de dimensión correspondiente

### 3.3 - Obtención de las Ecuaciones de Movimiento en el Espacio de Estados

Para obtener la representación de las ecuaciones de movimiento en el espacio de estados, se hace el siguiente cambio de variables, en la ecuación (2.7).

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} X \\ \dot{X} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Siendo

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= \dot{x}_1 \\ x_4 &= \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Convirtiéndose la ecuación (2.7) a una de la forma de (3.1a), donde.

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M]^{-1} [\bar{A}] & [0] \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Obsérvese que el problema tratado no hay amortiguador presente. Si existiese el término  $A_{22} \neq 0$ .

Quedando (2.7) expresada como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2' \\ \dot{x}_3' \\ \dot{x}_4' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta\alpha & \beta\alpha & 0 & 0 \\ \beta & -(\beta+1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma \\ \frac{\gamma}{\alpha} \end{Bmatrix} U \quad (3.5)$$

A hora bien, si se toma como vector-medida, el vector definido a continuación

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_1' - x_2' \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Es claro que para el sistema propuesto, en la práctica, puede fácilmente medirse  $x_1''$ , que es la aceleración de la masa principal y  $(x_1' - x_2')$ , que es la velocidad relativa entre el cuerpo del automovil y la rueda.

Se obtiene la siguiente ecuación de medición:

$$\{Z\} = \begin{bmatrix} -\beta\alpha & \beta\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\gamma \\ 0 \end{Bmatrix} U \quad (3.7)$$

Las ecuaciones (3.5) y (3.7) son la representación

en el espacio de estados de las ecuaciones de movimiento y medición del sistema activo. Estas ecuaciones tienen la forma de (3.1), donde:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta\alpha & \beta\alpha & 0 & 0 \\ \beta & -(\beta+1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8a)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma \\ \frac{\gamma}{\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.8b)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -\beta\alpha & \beta\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8c)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} -\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8d)$$

Es costumbre llamar este conjunto de ecuaciones como planta del sistema, que en este caso será una planta invariante en el tiempo, pues todas las matrices son constantes.

### 3.4 - Concepto de Observabilidad

#### Definición

Un estado  $Y(t)$  de un sistema dado, en un cierto instante  $t$ , es observable si, conociendo la entrada  $U(\tau)$  y la salida  $Y(\tau)$  en un intervalo finito de tiempo  $t_0 < \tau < t$ , queda completamente determinado el estado  $Y(t)$ . [18].

Un sistema se dice totalmente observable, si todos los estados  $Y(t)$  son observables, y no dependen de un cierto tiempo  $t$ .

### 3.5 - Concepto de Controlabilidad

#### Definición

Un estado  $Y(t_1)$  en un sistema es controlable, si el estado del sistema  $Y(t_0)$  en un instante  $t_0$ , puede ser transferido a  $Y(t_1)$  en un tiempo finito mediante alguna función de control.[18].

Si todos los estados  $Y(t_1)$  de un sistema son controlables, y si se puede pasar del estado  $Y(t_0)$  al estado  $Y(t_1)$  en cualquier tiempo finito, independiente de  $t_0$ , al sistema se lo reconoce como totalmente controlable.

Para determinar la controlabilidad completa en el tiempo  $t_0$ , para sistemas lineales, es solo necesario y suficiente; investigar si el estado cero, en lugar de las condiciones iniciales, puede ser transferido a cualesquiera estados finales.

En una forma más clara, puede enunciarse el concepto de controlabilidad total refiriéndose a la figura 3.2.



Un sistema será controlable, si se puede pasar del estado ① al estado ② mediante un vector de control, en un intervalo arbitrario de tiempo  $\Delta t$ .

### 3.6 - Controlabilidad del Sistema Activo

El estudio de la controlabilidad del sistema propuesto se hará con base en el siguiente teorema.

#### Teorema. [18]

Un sistema invariante en el tiempo, descrito por:

$\dot{\{Y\}} = [A] \{Y\} + [B] \{U\}$ , es totalmente controlable, si y solo si, la matriz  $[Q]$  de dimensión  $n \times nm$ , tiene rango  $n$ . Donde:

$$[Q] = ([B] \mid [A] [B] \mid \dots [A]^{n-1} [B]) \quad (3.9)$$

Aplicando el teorema anterior a la ecuación (3.8), la matriz de controlabilidad,  $[Q]$ , queda expressada en la siguiente forma:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & 0 & (\beta\alpha\gamma + \beta\gamma) \\ 0 & \frac{\gamma}{\alpha} & 0 & -(\gamma\beta + \frac{\gamma\beta + \gamma}{\alpha}) \\ -\gamma & 0 & (\beta\alpha\gamma + \beta\gamma) & 0 \\ \frac{\gamma}{\alpha} & 0 & -(\gamma\beta + \frac{\gamma\beta + \gamma}{\alpha}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Luego, para que el sistema propuesto sea totalmente

controlable, es necesario que la matriz  $[Q]$  tenga rango 4, para es to solamente es preciso que el determinante de  $[Q]$  sea diferente de cero.

Expandiendo por menores el determinante de  $[Q]$  se encuentra:

$$\text{Det } [Q] = - \frac{\gamma^4}{\alpha^2} \quad (3.11)$$

Como se puede observar de (3.11), para que el sistema sea totalmente controlable, es solamente necesario que la constante  $\gamma$  sea diferente de cero, sin intervenir para nada los valores que  $\alpha$  y  $\beta$  puedan tener. Por lo tanto al sistema se lo puede considerar totalmente controlable.

### 3.7 - Observabilidad del Sistema Activo

Se pretende en esta sección estudiar la observabilidad del sistema, cuando el vector de medición, es el propuesto en la ecuación (3.6). Se propone el vector de medición de esta forma por su sencillez, y por considerar que la ley de control, será fundamentalmente función de las variables que componen el vector de medición propuesto.

Para el análisis de la observabilidad del sistema, se usará el siguiente teorema:

Teorema. [18]

El sistema invariante en el tiempo

$$\dot{\{Y\}} = [A] \{Y\} + [B] \{U\}$$

$$\{Z\} = [C] \{Y\} + [D] \{U\}$$

• Es totalmente observable, si y solo si la matriz  $[P]$  de dimensión  $(mn \times n)$  tiene rango  $n$ , donde:

$$[P] = \begin{bmatrix} [C] \\ [C] \quad [A] \\ \vdots \\ |C| \quad |A|^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Aplicando el teorema a las ecuaciones (3.5) y (3.7) se obtiene la matriz de observabilidad  $[P]$  expressada como

$$[P] = \begin{bmatrix} -\beta\alpha & -\beta\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\beta\alpha & \beta\alpha \\ (-\beta\alpha-\beta) & (\beta\alpha+\beta+1) & 0 & 0 \\ -\beta\alpha(-\beta\alpha-\beta) & -\beta\alpha(\beta\alpha+\beta+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta(-\alpha-1) & \beta\alpha+\beta+1 \\ 0 & 0 & -\beta\alpha(\beta\alpha-\beta) & (-\beta\alpha(\beta\alpha+\beta+1)) \\ -\beta\alpha(-\beta\alpha-\beta+1) & (-\beta^2\alpha^2+2\beta^2\alpha+\alpha\beta+\beta^2+2\beta+1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

La matriz  $[P]$  dada por (3.13) tiene rango 4. Por lo tanto el sistema es totalmente observable con el vector de medición  $\{Z\} = [x_1'' (x_1' - x_2')]^T$ .

### 3.8 - Conclusiones

- a) El sistema activo es totalmente controlable para cualesquiera valores de  $(\beta = \frac{k_1}{k_2})$  y  $(\alpha = \frac{m}{M})$ , razón de constantes de resorte y razón de masas. Únicamente importa que la constante de control  $\gamma$  no sea nula, esto es evidente, pues si  $\gamma$  fuese nula no se tendría vector de control para controlar el sistema. No se tienen ningunas otras restricciones.
- b) El sistema activo es totalmente observable con el vector de medición  $\{Z\} = [X_1' (X_1' - X_2')]^T$
- c) Las variables que componen el vector de medición son fácilmente medibles en la práctica.

## IV - LA LEY DE CONTROL

### 4.1 - Introducción

En el capítulo anterior se encontró que el sistema activo es totalmente controlable.

Con la introducción de un vector de control  $U(t)$ , se puede en el sistema activo, pasar de un estado  $Y(t_1)$  a un estado  $Y(t_2)$ , donde el estado  $Y(t_2)$  es un mejor estado.

La ley de control debe escogerse de tal forma que ésta trate de estabilizar la masa principal del sistema, de las perturbaciones externas, (irregularidades del camino), de una manera mejor que el sistema pasivo.

### 4.2 - Condiciones que Debe Tener un Buen Sistema Pasivo

Un sistema pasivo de suspensión de automovil, puede ser mejorado de las dos siguientes formas.

- a) Disminuyendo la rigidez del resorte principal, resorte acoplador de las dos masas.
- b) Aumentando el valor de la masa principal, cuerpo del vehículo.

El mejoramiento del sistema pasivo se consigue pues, disminuyendo la frecuencia natural de la masa principal.

La disminución del amortiguamiento produce una mejora en el comportamiento del sistema, mayormente cuando el sistema está excitado con frecuencias muy altas, mayores que las frecuencias naturales del sistema.

El amortiguador debe existir para evitar valores

muy altos de desplazamiento, velocidad y aceleración en las resonancias.

Las afirmaciones anteriores se coligen a partir del análisis de una masa que se desea aislar de las perturbaciones que existen en su base. Para tal fin, se analiza el sistema mostrado en la figura 4.1.

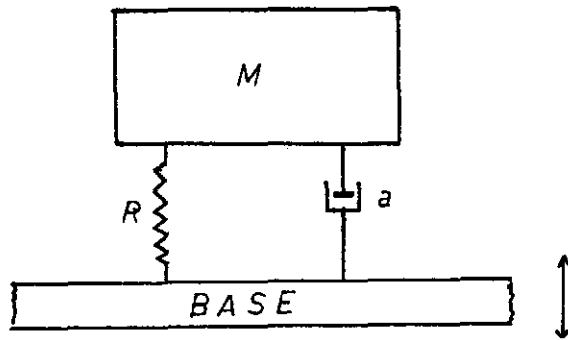


Figura 4.1 - Sistema de un grado de libertad, montado sobre una base perturbada.

De la literatura [2], se puede obtener la razón de amplitudes (Desplazamiento  $M$ /desplazamiento base) de la base a la masa  $M$ , la cual se desea aislar de las perturbaciones que sufre la base.

La perturbación se transmite de la base a la masa  $M$  a través del resorte y del amortiguador.

El valor de la razón de amplitud se quiere hacer mínimo, para tener así un mejor comportamiento de la masa  $M$ .

La razón de amplitud viene en este caso dada por

$$R = \sqrt{\frac{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{X_1}{X_2} \quad (4.1)$$

Donde:

$R$  = razón de amplitudes de la masa  $M$  a la base

$\zeta$  = factor de amortiguamiento

$\omega$  = frecuencia de excitación

$\omega_n$  = frecuencia natural de la masa  $M$

La gráfica de la ecuación (4.1) es de la forma mostrada en la figura 4.2

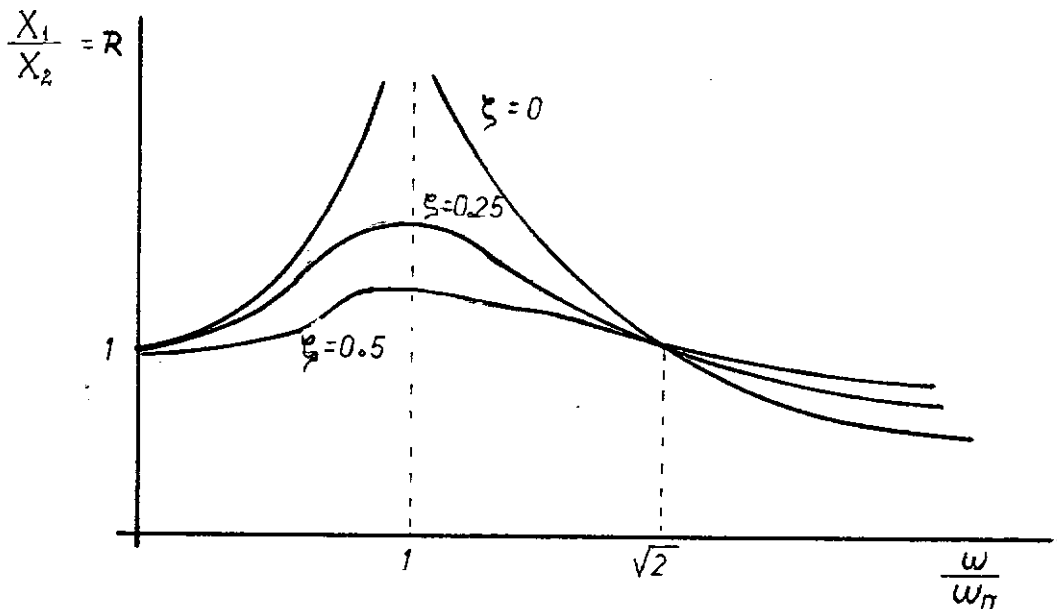


Figura 4.2 - Diagrama de la razón de amplitud contra  $\frac{\omega}{\omega_n}$  para un sistema con un grado de libertad.

De la figura 4.2 se colige inmediatamente lo siguiente:

- a) La razón de amplitud es pequeña para valores  $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ . Disminuyendo  $\omega_n$ , (aumentando la masa, o disminuyendo el resorte) se disminuye la razón de amplitud.
- b) La estabilización de M, de las perturbaciones de la base, solo es posible para valores de  $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ .
- c) Disminuyendo el valor del amortiguamiento, para valores de  $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$  se disminuye la razón de amplitud.
- d) Es necesario algún amortiguamiento en las frecuencias próximas a la resonancia.

El amortiguamiento más deseable depende de las condiciones del camino. Esto evidencia un valor variable.

El amortiguamiento aunque indeseable es necesario. Cual será el valor ideal del amortiguamiento? Para decir verdad no existe un valor ideal. Experimentalmente se han encontrado valores del amortiguamiento que resuelven este compromiso. Estos valores pueden variar desde

$$\zeta = 0.15 \text{ hasta } \zeta = 0.40 \quad |11|$$

#### 4.3 - Limitaciones en la Mejoría del Sistema Pasívo

Como se expuso en la sección anterior, una masa M puede aislarse de las perturbaciones de la base, disminuyendo el valor de su frecuencia natural.



Las dos posibles maneras de disminuir la frecuencia natural, de la masa principal de automovil son las siguientes:

- a) Disminuir la constante del resorte principal ( $k_1$ )
- b) Aumentar la masa principal ( $M$ )

Variando los componentes pasivos, resorte y masa; se puede conseguir un sistema pasivo mejor. El caso teórico ideal es cuando  $k_1$ , es nula, lo que es físicamente imposible.

Existen muchas limitaciones en cuanto a la variación que pueda tener  $M$  y  $k_1$ . A continuación se presentan las principales limitaciones.

- a) Con resorte muy suaves, se producen grandes deflexiones para pequeños cambios en la masa principal. En el caso del automovil, el cuerpo principal sufriría grandes desplazamientos estáticos con la salida o entrada de un pasajero.
- b) Con resortes suaves se producen grandes giros del cuerpo principal, sobre un eje longitudinal (rolling), al tomar el vehículo curvas. También se producen grandes giros sobre un eje lateral (pitching) al frenar el vehículo.

Estos afectos se muestran más claramente en la figura 4.3.

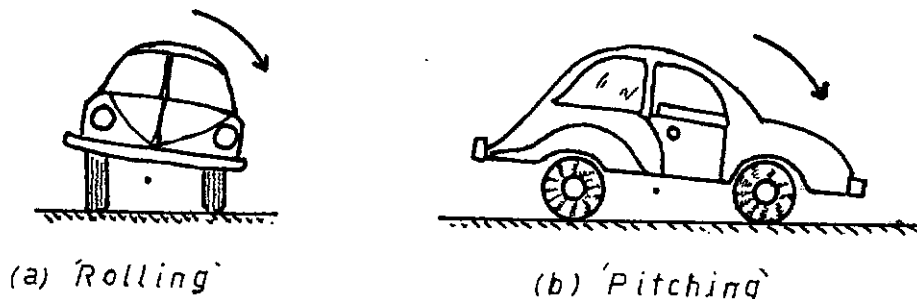


Figura 4.3 - Defectos de los resortes suaves.

El aumento excesivo de la masa del cuerpo del vehículo, también produce los mismos efectos que los resortes suaves.

Además el aumentar la masa produce problemas inerciales, tanto en las arrancadas como en las frenadas, esto exige que los vehículos tengan mayores motores, y mejores sistemas de frenos.

Otra mejoría del sistema pasivo se puede conseguir quitando el amortiguamiento. Esto no se lo puede hacer por dos razones:

- a) El amortiguamiento debe existir para evitar altos valores de desplazamiento, velocidad y aceleración del cuerpo principal al pasarse por las frecuencias de resonancia.
- b) Debe existir el amortiguamiento, para estabilizar el cuerpo principal, llevarlo a su posición original, luego que el sistema se ha puesto a vibrar con una condición inicial en la rueda, resalto o bache por ejemplo.

En el caso (a) se puede pensar en tener solo amortiguamiento para pasar por las frecuencias de resonancia, y luego desligarlo; pero la condición (b) exige que el amortiguamiento esté presente en todo momento.

#### 4.4 - Escogencia de la Ley de Control

Teniendo en mente las condiciones que se necesitan para mejorar un sistema pasivo, lo que no se puede conseguir debido a las limitaciones existentes. Se puede proceder a conseguir una mejoría del sistema pasivo convirtiéndolo en activo. El control usado debe ser tal que disminuya la frecuencia natural de la masa principal y a la vez modifique el amortiguamiento.

El vector de control debe aumentar la masa del cuerpo principal, y variar el amortiguamiento. El aumento de la masa se consigue en una forma artificial, usando una masa inercial aparente. Esto a la vez produce una disminución en la razón de amortiguamiento.

Una sugerición para la ley de control será:

$$U(t) = a\ddot{x}_1(t) + b_1\dot{x}_1(t) + b_2\dot{x}_2(t) \quad (4.2)$$

$$U(t) = a\ddot{x}_1(t) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (4.3)$$

Donde:

$U(t)$  = vector de control

$a, b_1, b_2, b$  = constantes

$\ddot{x}_1(t)$  = aceleración del cuerpo principal

$\dot{x}_1(t)$  = velocidad del cuerpo principal

$\dot{x}_2(t)$  = velocidad de la rueda

Para simplificar la medición del vector de control se hace en la ecuación (4.2)  $b_1 = b_2 = b$  lo que la transforma en (4.3), donde  $b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$  no es ni más ni menos que el amortiguador entre la masa principal y la rueda, el cual es un elemento componente del sistema pasivo, cuya optimización para el sistema pasivo, se hace por los medios tradicionales, es decir experimentalmente.

El sistema activo se transformará ahora al tipo representado por el modelo físico mostrado en la figura 4.4.

Siendo la ley de control dada en este caso por

$$U(t) = a\ddot{x}_1 \quad (4.4)$$

Es posible aún pensar en un dispositivo que represente ecuación (4.2) integralmente. Vease [17]

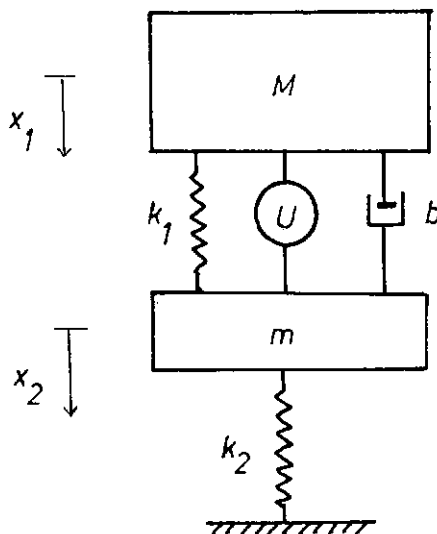


Figura 4.4 - Modelo físico del sistema activo

En realidad, el vector de control propuesto en (4.3) no se encontró tan directamente, como aparece en todo el análisis sobre la ley de control. Por lo contrario; se simuló el sistema activo en un computador analógico EAI TR-48, donde se estudiaron varios vectores de control, se observó la influencia de  $\ddot{x}_1$ ,  $\ddot{x}_2$ ,  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $x_1$  y  $x_2$  en el comportamiento del sistema. Algunas de estas variables en el control, mejoran el comportamiento del sistema, otras lo empeoran, otras tornan el sistema inestable.

En general se encontró que la mayor mejora la produce el vector  $U = a\ddot{x}_1$ , aunque alterar la influencia de  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2$  también puede producir grandes mejoras. Para un mejor comportamiento, la tendencia es aumentar la influencia de  $\dot{x}_1$  y disminuir la influencia de  $\dot{x}_2$ . Esto equivale en cierta forma a dar a la masa  $M$  un apoyo inercial. La influencia de  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2$  produce dos efectos desventajosos:

- 1) Se aumenta mucho la carga sobre la rueda,
- 2) Es necesario integrar  $\ddot{x}_1$ . Vease [17].

En este trabajo solo se investigará la ley de control dada por (4.3) o (4.4).

#### 4.5 - Conclusión Sobre la Ley de Control

- a) La ley de control escogida es la siguiente

$$U = a\ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

Donde:

$b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$  es el modelo matemático del amortiguador entre la masa principal y la rueda, elemento del sistema pasivo que se optimiza por medios tradicionales y  $a\ddot{x}_1$  es el modelo matemático del elemento activo introducido al sistema pasivo.

El sistema activo se puede reducir al mostrado en la figura 4.4, con dos elementos pasivos, amortiguador y resorte, y un elemento activo, cuyo modelo matemático está dado por la ley de control.

$U = a\ddot{x}_1$ , que es un valor proporcional a la aceleración de la masa principal.

- b) Esta ley de control es una ley muy simple, es de hecho una ley sub-óptima, pues existen leyes de control más complejas que toman en cuenta la influencia de otras variables, y mejoran el comportamiento del sistema en un grado mayor que la ley de control escogida.
- c) Esta es una ley relativamente simple, con un solo parámetro a optimizar (a). Además la aceleración es una cantidad fácil de medir en una forma absoluta, bajo cualesquiera condiciones.
- d) Es desarrollo teórico presentado en este capítulo meramente justifica la escogencia de la ley de control.

## V - ESTABILIDAD DEL SISTEMA ACTIVO

### 5.1 - Introducción

El concepto de estabilidad juega un papel importante en el diseño de sistemas. Es por lo tanto necesario analizar la estabilidad de cualquier sistema en estudio.

Existen muchas formas de definir la estabilidad de un sistema, y otras tantas para estudiarla.

En este capítulo se presenta el análisis de la estabilidad del sistema activo, que es un sistema lineal invariante en el tiempo, para el cual se define la estabilidad según el sentido de Liapunov. En este caso el estudio de la estabilidad es relativamente sencillo, y se basa fundamentalmente en el análisis de la ecuación característica del sistema.

Es conveniente dar algunas definiciones relativas a la estabilidad, antes de estudiar la estabilidad del sistema particular analizado.

Un tipo de estabilidad, se define con base en la respuesta que tiene el sistema lineal invariante en el tiempo, en las proximidades del estado cero,  $\{Y\} = \{0\}$ , (estado de equilibrio).

Se define una región en el espacio de estados, como  $|\{Y\}| < \epsilon$ , tal que exista una pequeña región de perturbaciones no nulas, que rodean el estado de equilibrio  $\{Y\} = \{0\}$ , que originan la respuesta, la cual se mantiene acotada a valores menores que el número real  $\epsilon$ . [18]

Definición. |18|

El estado de equilibrio  $\{Y\} = \{0\}$  del sistema  $\{\dot{Y}\} = [A] \{Y\}$  es estable en el sentido de Liapunov (E.S.L), si para cualquier  $t_0$  y cualquier número real  $\epsilon > 0$ , existe algún  $\delta > 0$ , tan pequeño como se quiera, dependiente de  $t_0$  y  $\epsilon$ , tal que si  $|\{Y_0\}| < \delta$ , entonces  $|\{Y(t)\}| < \epsilon$  para todo  $t > t_0$ .

Definición. |18|

El estado de equilibrio  $\{Y\} = \{0\}$  es asintoticamente estable si

- a) Es estable en el sentido de Liapunov
- b) Para cualquier  $t_0$  y  $\{Y_0\}$ , suficientemente cercano a  $\{0\}$ ,  $\{Y(t)\} \rightarrow \{0\}$  cuando  $t \rightarrow \infty$

Hablando con este sentido de estabilidad, se dice que un sistema es estable si el estado cero es estable, y un sistema será inestable si no es estable.

## 5.2 - Criterios para Determinar la Estabilidad de un Sistema

Existen varios criterios para estudiar la estabilidad de un sistema. Un criterio adecuado para estudiar la estabilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo, se basa en el análisis de su ecuación característica.

Sea el sistema no perturbado descrito por la ecuación de estado

$$\{\dot{Y}\} = [A] \{Y\} \quad (5.1)$$



Donde:

$[A]$  = matriz de transición

$\{Y\}$  = vector de estado

Se entiende por ecuación característica, el polinomio resultante de igualar a cero el determinante de la siguiente matriz

$$[ [A] - \lambda_n [I] ] \quad (5.2)$$

Donde

$[I]$  = matriz unidad

$\lambda_n$  = autovalores de la matriz de transición

La forma del polinomio característico es la siguiente

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (5.3)$$

Una condición necesaria, para que el sistema sea estable es la que todos los coeficientes  $a_n$  de la ecuación característica deben tener el mismo signo y ninguno debe de ser nulo.

Una forma directa para determinar la estabilidad del sistema, consiste en encontrar las raíces del polinomio característico.

Si todos los autovalores de la matriz de transición  $[A]$ , raíces del polinomio característico, tienen partes reales ne-

gativas, el sistema será asintóticamente estable en la posición de equilibrio  $\{Y\} = \{0\}$ .

Cuando el polinomio característico es de un grado elevado, es tedioso y algunas veces hasta imposible determinar sus raíces.

Existe otro método para analizar la estabilidad de un sistema, en el cual no es necesario encontrar las raíces del polinomio característico. Este es el conocido como criterio de ROUTH.

### Criterio de ROUTH

Siendo todos los coeficientes del polinomio característico positivos, lo cual siempre se consigue multiplicando el polinomio característico por  $-1$ ; éstos se ordenan en filas y en columnas, surgiendo el ordenamiento conocido como Arreglo de Routh, que tiene la siguiente forma:

|                 |          |          |          |       |         |
|-----------------|----------|----------|----------|-------|---------|
| $\lambda^n$     | $a_0$    | $a_2$    | $a_4$    | $a_6$ | $\dots$ |
| $\lambda^{n-1}$ | $a_1$    | $a_3$    | $a_5$    | $a_7$ | $\dots$ |
| $\lambda^{n-2}$ | $b_1$    | $b_2$    | $b_3$    | $b_4$ | $\dots$ |
| $\vdots$        | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |       |         |
| $\lambda^2$     | $e_1$    | $e_2$    | 0        |       |         |
| $\lambda^1$     | $f_1$    | 0        |          |       |         |
| $\lambda^0$     | $g_1$    |          |          |       |         |
|                 | 1        |          |          |       |         |
|                 | columna  |          |          |       |         |

Figura 5.2 - Arreglo de ROUTH

En la figura 5.2 los coeficientes  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $f_i$ ,  $e_i$  y  $g_i$  se calculan multiplicando y restando los coeficientes dados o calculados como lo indican las flechas, y luego dividiendo por el primer término de la fila superior.

El término  $b_1$  vendrá dado por

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad (5.4)$$

Para una mejor comprensión del arreglo de Routh puede verse [9].

Obtenido el arreglo de Routh, se aplica el criterio de Routh para estabilidad que dice lo siguiente:

"El número de raíces del polinomio característico, con partes reales positivas, es igual al número de cambios en signo de los coeficientes de la primera columna en el arreglo de Routh".

La justificación teórica de este criterio puede encontrarse en [22].

### 5.3 - Estabilidad del Sistema Activo con la Ley de Control $U = \ddot{x}_1 + \frac{b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{a_1}$

Por el hecho de ser la ley de control, una ley propuesta, no se puede a priori garantizar que el sistema controlado sea estable; por tal razón es necesario estudiar la estabilidad del sistema con el vector de control propuesto.

En la sección 2.4 se encontraron las ecuaciones de movimiento del sistema activo para una ley general de control.

Sustituyendo la ley de control  $U = a\ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$  en la ecuación de movimiento dada por (2.4), y haciendo las sustituciones dadas por (2.5) se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema activo en una forma normalizada, para el vector de control propuesto, que tienen la forma:

$$\ddot{x}_1'' = -\beta\alpha (x_1 - x_2) - 2\zeta\alpha (\dot{x}_1' - \dot{x}_2') - \gamma \ddot{x}_1'' \quad (5.5a)$$

$$\ddot{x}_2'' = \beta (x_1 - x_2) + 2\zeta (\dot{x}_1' - \dot{x}_2') - \ddot{x}_2 + \frac{\gamma}{\alpha} \ddot{x}_1'' \quad (5.5b)$$

Que se pueden escribir de la siguiente forma

$$(1 - \gamma) \ddot{x}_1'' = -\beta\alpha x_1 + \beta\alpha x_2 - 2\zeta\alpha \dot{x}_1' + 2\zeta\alpha \dot{x}_2' \quad (5.6a)$$

$$-\frac{\gamma}{\alpha} \ddot{x}_1'' + \ddot{x}_2'' = \beta x_1 - (1 + \beta) x_2 + 2\zeta \dot{x}_1' - 2\zeta \dot{x}_2' \quad (5.6b)$$

Que son el modelo matemático de un sistema con realimentación (closed loop system).

Las ecuaciones (5.6) se pueden escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 + \gamma & 0 \\ -\frac{\gamma}{\alpha} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1'' \\ \ddot{x}_2'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta\alpha & \beta\alpha \\ \beta & -(1+\beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\zeta\alpha & 2\zeta\alpha \\ 2\zeta & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2' \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

Que tiene la forma

$$[\bar{M}] \{X''\} = [\bar{K}] \{X\} + [\bar{C}] \{X'\}$$

Donde:

$[\bar{M}]$  = será la matriz de masa

$[\bar{K}]$  = será la matriz de fuerzas elásticas, que en la forma corriente de describir un sistema mecánico corresponde a  $- [K]$ .

$[\bar{C}]$  = matriz de amortiguamiento, representada en el sistema mecánico por  $- [C]$ .

Cabe hacer la observación que si (5.6) o (5.7) se hace  $\gamma = 0$ , el sistema activo se convierte en pasivo.

Procediendo tal como se lo hizo en la sección 3.3, usando las ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.4) donde el término  $A_{22} \neq 0$  pues existe amortiguamiento en el sistema.

La ecuación matricial (5.7) se transforma a la siguiente ecuación de estado.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2' \\ \dot{x}_3' \\ \dot{x}_4' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ L & -L & N & -N \\ -P & P-1 & -R & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

Donde:

$$L = - \frac{\beta \alpha}{1+\gamma} ; P = \frac{\beta \gamma}{1+\gamma} - \beta ; N = - \frac{2\zeta\alpha}{1+\gamma} ; R = \frac{2\zeta\gamma}{1+\gamma} - 2\zeta \quad (5.9)$$

La ecuación (5.8) tiene nuevamente la forma.

$$\{\dot{X}\} = [A] \{X\} \quad (5.10)$$

### ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DEL SISTEMA DINÁMICO ACTIVO

Haciendo el determinante  $| [A] - [I] \lambda | = 0$  se obtiene

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ L & -L & N-\lambda & -N \\ -P & P-1 & -R & R-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5.11)$$

Expandiendo el determinante (5.11) se obtiene la ecuación característica del sistema activo, que tiene la forma

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (5.12)$$

Donde:

$$a_0 = 1 ; a_1 = -N-R ; a_2 = 1-P-L ; a_3 = -N ; a_4 = -L \quad (5.13)$$

Sustituyendo en (5.13) los valores de N, R, L y P dados por (5.9), se obtienen los coeficientes de la ecuación carac

terística como:

$$a_0 = 1 \quad (5.14a)$$

$$a_1 = \frac{2\zeta(\alpha + 1)}{1 + \gamma} \quad (5.14b)$$

$$a_2 = \frac{\gamma + \beta(1 + \alpha) + 1}{1 + \gamma} \quad (5.14c)$$

$$a_3 = \frac{2\zeta\alpha}{1 + \gamma} \quad (5.14d)$$

$$a_4 = \frac{\beta\alpha}{1 + \gamma} \quad (5.14e)$$

En la sección 4.2 se estableció que una condición necesaria, pero no suficiente para que un sistema dinámico sea estable, es que los coeficientes  $a_i$  de la ecuación característica no sean nulos, y además tengan el mismo signo.

Luego, para llenar esta necesidad, se obligan los coeficientes dados por (5.14) a ser mayores que cero. Siendo  $\zeta$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  positivos se tiene:

$$\begin{array}{ll} a_0 \text{ ————— } 1 > 0 & \rightarrow \text{ Evidente} \\ a_1 \text{ ————— } \frac{2\zeta(\alpha+1)}{1+\gamma} > 0 & \rightarrow \gamma > -1.0 \\ a_2 \text{ ————— } \frac{\gamma + \beta(1+\alpha) + 1}{1+\gamma} > 0 & \rightarrow \gamma > -1 - \beta(1+\alpha) \quad (5.15) \\ a_3 \text{ ————— } \frac{2\zeta\alpha}{1+\gamma} > 0 & \rightarrow \gamma > -1.0 \\ a_4 \text{ ————— } \frac{\beta\alpha}{1+\gamma} > 0 & \rightarrow \gamma > -1.0 \end{array}$$

De (5.15) se observa que el sistema se tornará inestable para valores de  $\gamma$  menores o iguales a  $-1$ , también lo será para un valor de  $\gamma$  igual a infinito, pues no se cumple una condición necesaria para la estabilidad.

El valor  $\gamma = -1$ , se puede determinar a priori. Si se observa que en la ecuación (5.7) un valor de  $\gamma = -1$ , torna la matriz de masa  $[\bar{M}]$  singular, esto hace el sistema inestable.

### ANÁLISIS DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

La ecuación (5.12) es una ecuación de cuarto grado, de muy difícil solución analítica.

Para estudiar las raíces de esta ecuación, lo mejor es usar un computador digital; existiendo subrutinas de biblioteca disponibles para resolver este problema.

Para resolver el polinomio característico, se preparó un pequeño programa, llamando la subrutina POLRT, que se rodó en un computador IBM-1130.

En la figura 5.4 se presenta el listado del programa usado para encontrar las raíces del polinomio característico.

Los resultados obtenidos en el computador digital, se muestran en una forma gráfica en la figura 5.5, que es una representación en el plano complejo de las raíces de la ecuación característica.

En la figura 5.5 se observa, que para valores  $\gamma > -1$ , todas las partes reales de las raíces de la ecuación característica son negativas. Esto deja ver que el sistema activo es teórica-



```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(2501READER,1403PRINTER)
C
C     ESTE PROGRAMA ENCUENTRA LAS RAICES DEL POLINOMIO
C     CARACTERISTICO DEL SISTEMA ACTIVO DE SUSPENSION
C     DE UN AUTOMOVIL
C
C     DIMENSION POL(5),POLA(5),RREAL(4),RIMAG(4)
C     N=4
C
C     VALORES TIPICOS DE ALFA,BETA,CSI
C
C     ALFA=0.0666
C     BETA=0.10
C     CSI=0.40
2     READ(8,100)GAMA
100   FORMAT(F20.1)
      IF (1.+GAMA)3,4,3
4     CALL EXIT
3     POL(1)=BETA*ALFA/(1.+GAMA)
      POL(2)=(2.*CSI*ALFA)/(1.+GAMA)
      POL(3)=(GAMA+BETA*(1.+ALFA)+1.)/(1.+GAMA)
      POL(4)=(2.*CSI*(1.+ALFA))/(1.+GAMA)
      POL(5)=1.
      CALL POLRT(POL,POLA,N,RREAL,RIMAG,KR)
      IF(KR)41,40,41
41    WRITE(5,200)
200   FORMAT(/,'NO HUBO ITERACION')
      GO TO 2
40    WRITE(5,300)
300   FORMAT(/,' RAICES REAL/IMAGINARIA DE LA
1     ECUACION CARACTERISTICA')
      WRITE(5,310)RREAL
      WRITE(5,310)RIMAG
310   FORMAT(4E14.5)
      GO TO 2
      END

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON          0  VARIABLES          56  PROGRAM          250

END OF COMPILATION

```

Figura 5.4. Listado del programa para resolver la ecuación característica

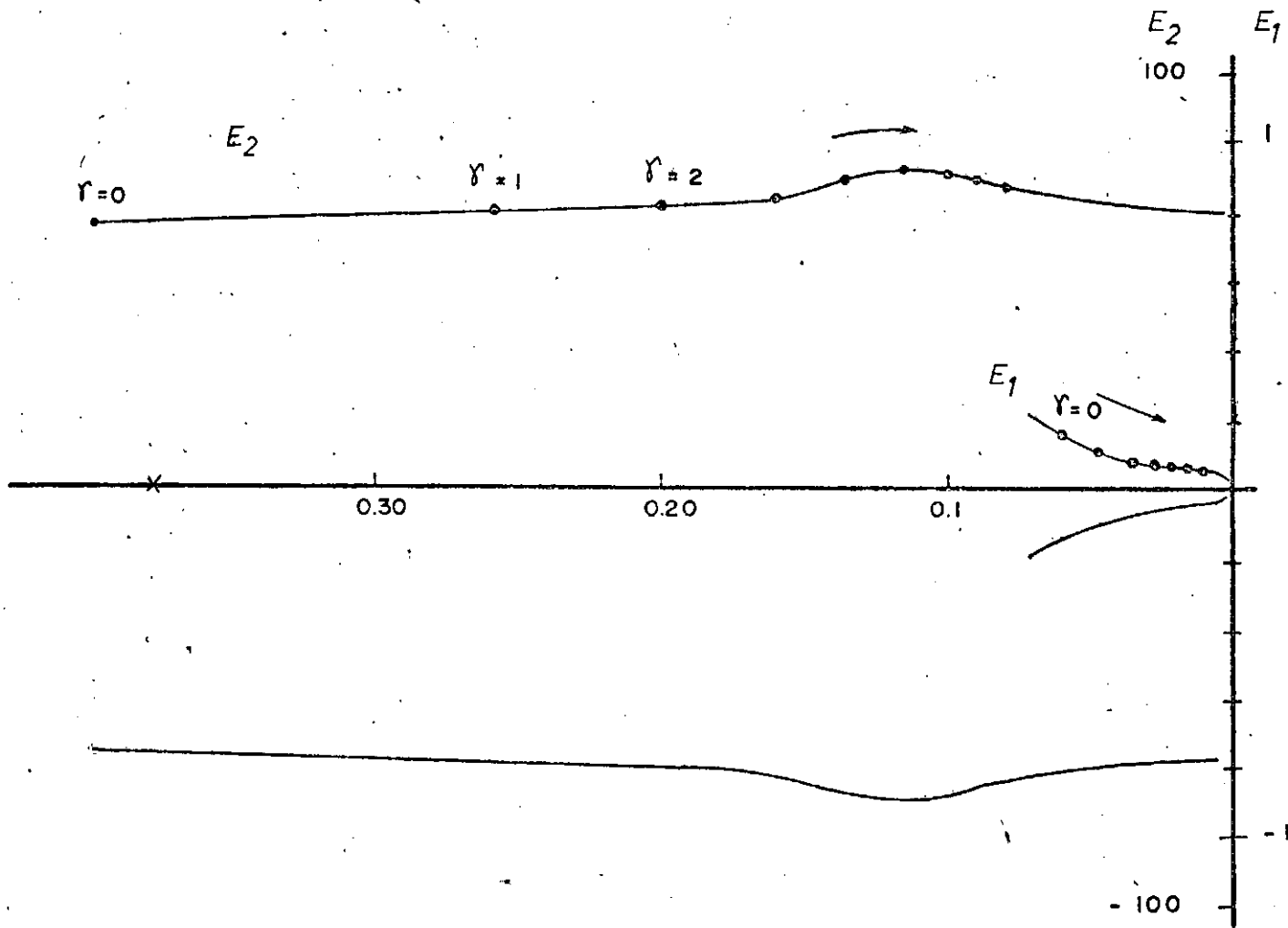


Fig. 5.5 Representación de las raíces del polinomio característico

mente estable para cualquier valor de  $\gamma > -1.0$ ; pero conforme  $\gamma$  va aumentando, el grado de estabilidad del sistema va disminuyendo rápidamente. Entendiendo por grado de estabilidad el <sup>menor</sup> valor absoluto de la parte real negativa de las raíces de la ecuación característica. Por ejemplo, para  $\gamma = 0$  el grado de estabilidad del sistema es 0.022, que baja hasta un valor de 0.00026 cuando  $\gamma = 100.0$ .

Esto hace ver que el aumentar  $\gamma$  indefinidamente, lleva el sistema a valores de estabilidad muy bajos, esto puede ser muy peligroso.

### APLICACIÓN DEL CRITERIO DE ROUTH

Tomando la ecuación (5.12) y repitiéndola para mayor facilidad

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$$

Se procede a construir el arreglo de Routh (Figura 5.2), siendo éste para una ecuación de cuarto grado, de la siguiente forma:

|   |             |                                     |       |       |        |
|---|-------------|-------------------------------------|-------|-------|--------|
| 1 | $\lambda^4$ | $a_0$                               | $a_2$ | $a_4$ |        |
| 2 | $\lambda^3$ | $a_1$                               | $a_3$ | 0     |        |
| 3 | $\lambda^2$ | $\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = T$ | $a_4$ | 0     | (5.16) |
| 4 | $\lambda^1$ | $\frac{T a_3 - a_1 a_4}{T}$         |       |       |        |
| 5 | $\lambda^0$ | $a_4$                               |       |       |        |

Para estabilidad asintótica, todos los valores de la columna primera deben ser positivos.

Anteriormente se había forzado que  $a_0, a_1, a_4$  fueran positivos.

Por lo tanto solamente debe obligarse que el tercer y cuarto término de la primera columna sean ambos positivos, así el sistema será asintoticamente estable.

Sustituyendo los términos  $a_0, a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$ , por sus respectivos valores, dados por las ecuaciones (5.14), se obtiene:

$$3^{\text{er}} \text{ Término} \quad T = \frac{2\alpha\beta + \beta\alpha^2 + \beta + 1 + \gamma}{(1 + \gamma)(1 + \alpha)} \quad (5.17)$$

$$4^{\text{to}} \text{ Término} \quad \frac{T a_3 - a_1 a_4}{T} = \frac{2\zeta\alpha}{2\alpha\beta + \beta\alpha^2 + \beta + 1 + \gamma} \quad (5.18)$$

Tomando (5.17)

$$\frac{2\alpha\beta + \beta\alpha^2 + \beta + 1 + \gamma}{(1 + \gamma)(\alpha + 1)} > 0$$

Como  $(1 + \gamma)$  y  $(1 + \alpha)$  son positivos, se sigue que

$$2\alpha\beta + \beta\alpha^2 + \beta + 1 + \gamma > 0$$

Siendo

$$\gamma > -(2\alpha\beta + \beta\alpha^2 + \beta) - 1 \quad (5.19)$$

donde  $(2\alpha\beta + \beta\alpha^2 + \beta)$  es siempre positivo, pues  $\beta$  y  $\alpha$  son positivos.

Por lo tanto el sistema sigue siendo estable para  $\gamma > -1.0$ .

Tomando (5.18)

$$\frac{2\zeta\alpha}{2\alpha\beta + \beta\alpha^2 + \beta + 1 + \gamma} > 0$$

Como  $2\zeta\alpha > 0$ , se sigue inmediatamente que

$$\gamma > - (2\alpha\beta + \beta\alpha^2 + \beta) - 1 \quad (5.20)$$

El sistema continua siendo asintoticamente estable para  $\gamma > -1$ .

#### 5.4 - Conclusiones sobre la Estabilidad del Sistema Activo Usando el Control $U(t) = a\ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

El valor  $\gamma > -1$  se ha estado nombrando durante todo el análisis de la estabilidad, quizá el hecho de mencionar tantas veces el valor  $-1$  dé motivo a confusión.

La mejor forma de dejar claro el significado del bndito  $-1$ , es dar una conclusión clara y concisa, que se hace con la ayuda de un esquema, figura (5.6).

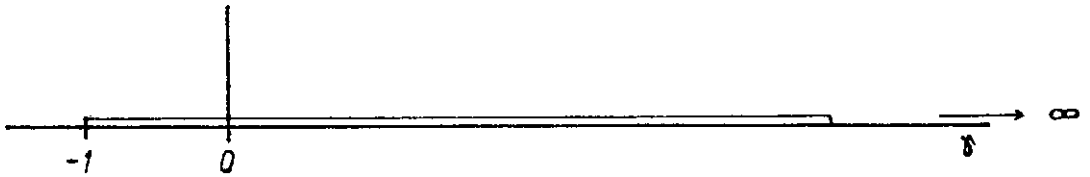


Figura 5.6 - Ámbito de  $\gamma$  donde el sistema activo es asintoticamente estable.

### Conclusión

"El sistema activo es asintoticamente estable con la ley de control  $U = \gamma X_1$ , siempre que  $\gamma$  varíe entre - 1.0 y infinito excluyendo el valor  $\gamma = - 1.0$ "

Puede observarse que en  $\gamma = \frac{a}{M} = -1$ , en la ecuación (5.7), la matriz de masa  $[\bar{M}]$ , se torna singular, negativa definida tornando el sistema inestable.

Para valores relativamente grandes de  $\gamma$ ; 10 por ejemplo, el grado de estabilidad del sistema se hace muy bajo. Esto hace ver que para valores altos de  $\gamma$ , cualquier perturbación extraña no prevista, pueda tornar el sistema activo inestable. Esto se puede observar mejor en una simulación en el computador analógico. Lo cual se hará en el capítulo VII.

## VI - ESTUDIO ANALITICO - NUMERICO DE LA INFLUENCIA DE LA LEY DE CONTROL

### 6.1 - Introducción

Fundamentalmente se trata en este capítulo de optimizar la ley de control, la cual ya se había establecido en el capítulo IV, ver ecuación (4.3). Además, se analizan algunos efectos secundarios del control sobre el sistema, por ejemplo la carga sobre la rueda.

El problema de optimización básicamente consiste en encontrar una ley de control  $U(t)$ , tal que, lleve el sistema de un estado deseado  $C$ .

En la práctica deben considerarse ciertas limitaciones físicas del elemento de control. En algunos casos, la energía disponible para hacer funcionar el control es limitada, en otros casos el tiempo para alcanzar el estado inicial es limitado.

### 6.2 - Critério de Optimización

Existen muchos criterios para optimizar un sistema en verdad se puede decir que cada sistema exige un criterio de optimización diferente.

Particularmente en este trabajo se hará uso de uno de los tantos criterios, el conocido como criterio del miniMax; el cual es un criterio directo de optimización.

El criterio del miniMax se basa fundamentalmente en procurar un control óptimo, que haga mínimo el máximo valor de una o todas las variables del campo de variables de estado  $Y(t)$ . For

malmente este criterio puede escribirse de la siguiente manera:

$$U(t)_{op} = \min \max \{Y(t)\}_{U(t)} \quad (6.1)$$

Donde

$U(t)_{op}$  = Ley óptima de control

$Y(t)$  = variable de estado que se desea minimizar

La ecuación (6.1) se lee de la siguiente forma:

"El valor óptimo del vector de control,  $\{U(t)_{op}\}$  es aquel vector de control,  $\{U(t)\}$ , que aplicado a un sistema, haga mínimo el máximo valor del estado  $\{Y(t)\}$ ".

### 6.3 - Optimización Analítica de la Ley de Control $U = \gamma X_1''$

En el capítulo IV se había propuesto la ley de control como  $U(t) = a\ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ , en la cual  $b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$  es la representación matemática de un amortiguador, que se considera un elemento pasivo, el cual se optimiza por los medios tradicionales. De esta forma el sistema activo se redujo al representado por el modelo físico de la figura 4.4, quedando el control activo reducido a  $U = a\ddot{x}_1$ , que en la forma normalizada se convierte a  $U = \gamma X_1''$ .

Se desea ahora hallar el valor de  $\gamma$  en la ley de control, que aumenta en el mayor grado posible el confort de los pasajeros en el automóvil.



## CONCEPTO DE COMODIDAD EN UN AUTOMOVIL [2]

Suponiendo que el automovil se mueva hacia adelante con una velocidad constante, cual será la variable "característica", que puede ser considerada como medida de comodidad para los pasajeros dentro del cuerpo principal del vehículo? Puede ser el desplazamiento vertical o una de sus derivadas.

No es el desplazamiento vertical, no importa cuanto el cuerpo principal del automovil se desplace verticalmente, pues los pasajeros allí dentro tendrán una buena sensación de comodidad.

No es la velocidad vertical, pues no hay objeción de cuán rápida sea la subida o el descenso.

Dentro de ciertos límites, tampoco es la aceleración vertical, la cual será sentida como una fuerza constante.

Los límites de aceleración para un buen confort dentro del automovil, diagramas aceleración-confort, pueden verse en [21].

Los choques repentinos son los que producen sensaciones desconfortables, que son producidos por los cambios de la aceleración.

Así, una medida de la comodidad dentro del automovil, es la razón de variación de la aceleración, cantidad conocida como aceleración segunda (Jerk).

Ahora el problema de optimización se reduce a encontrar el valor de  $\gamma$ , en la ley de control  $U(t) = \gamma X''$ , tal que se haga mínimo el máximo valor de la aceleración segunda de la masa principal; es decir se quiere:

$$\min \max \{X_1'''(t)\} \quad (6.2)$$

Para encontrar la aceleración segunda del cuerpo principal, se resuelven primero que nada las ecuaciones de movimiento del sistema activo, (5.6). Donde el sistema vibra bajo la acción de una excitación en la rueda, producida por las irregularidades del camino, supuesto senoide, de la forma  $y_0 \sin \bar{\omega}t$  o  $y_0 k_2 \sin \bar{\omega}t$ .

A continuación se repiten las ecuaciones de movimiento, escritas en la forma:

$$(1 + \gamma) X_1'' + \beta \alpha X_1 - \beta \alpha X_2 + 2\zeta \alpha X_1' - 2\zeta \alpha X_2' = 0 \quad (6.3a)$$

$$X_2'' - \frac{\gamma}{\alpha} X_1'' - \beta X_1 + (1 + \beta) X_2 - 2\zeta X_1' + 2\zeta X_2' = Y_0 \sin \bar{\omega}t \quad (6.3b)$$

Donde

$$Y_0 = y_0/L$$

$L$  = Longitud arbitraria de normalización

$y_0$  = Amplitud máxima de la irregularidad del camino, supuesto senoide

$\bar{\omega} = \omega/\omega_{n2}$  = frecuencia adimensional

$\omega$  = excitación externa

Aplicando el método de la impedancia mecánica a (6.3), donde se supone una solución del tipo

$$X_1(\tau) = X_1 e^{i\bar{\omega}\tau} \quad X_2(\tau) = X_2 e^{i\bar{\omega}\tau} \quad (6.4)$$

Expresando

$$Y_0 \text{ sen } \bar{\omega}\tau = Y_0 e^{i\bar{\omega}\tau} \quad (6.5)$$

Sustituyendo (6.4), sus derivadas y (6.5) en (6.3) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$(-\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^2\gamma + \beta\alpha + 2\bar{\omega}\zeta\alpha i) X_1 + (-\beta\alpha - 2\zeta\alpha\bar{\omega}i) X_2 = 0 \quad (6.6a)$$

$$(\bar{\omega}^2 \frac{\gamma}{\alpha} - \beta - 2\zeta\bar{\omega}i) X_1 + (-\bar{\omega}^2 + 1 + \beta + 2\zeta\bar{\omega}i) X_2 = Y_0 \quad (6.6b)$$

La solución de (6.6) puede ser escrita como

$$X_i(t) = |X_i|_{\max} \text{ sen } (\bar{\omega}\tau + \phi i) \quad (5.7)$$

Donde

$$|X_1|_{\max} = A = Y_0\alpha \sqrt{\frac{\beta^2 + 4\zeta^2\bar{\omega}^2}{[(\gamma+1)\bar{\omega}^4 + (-1-\beta-\gamma-\beta\alpha)\bar{\omega}^2 + \beta\alpha]^2 +}} \quad (6.8)$$

$$+ [(-2\zeta-2\zeta\alpha)\bar{\omega}^3 + 2\zeta\alpha\bar{\omega}]^2$$

$$|X_2|_{\max} = B = Y_0 \sqrt{\frac{(-\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^2\gamma + \beta\alpha)^2 + 4\bar{\omega}^2\zeta^2\alpha^2}{[(\gamma+1)\bar{\omega}^4 + (-1-\beta-\gamma-\beta\alpha)\bar{\omega}^2 + \beta\alpha]^2 +}} \quad (6.9)$$

$$+ [(-2\zeta-2\zeta\alpha)\bar{\omega}^3 + 2\zeta\alpha\bar{\omega}]^2$$

$\phi_i$  = ángulo de fase que se encuentra a partir (6.6), sustituyendo en el numerador los valores correspondientes a  $X_1$  y  $X_2$ , cuando se usa la regla de Cramer.

Derivando (6.9) continuamente con respecto a  $\tau$ , para  $i = 1$ ; se obtiene la velocidad, aceleración y aceleración segunda para el cuerpo principal, en la siguiente forma

$$\text{Desplazamiento} = X_1 = A \sin(\bar{\omega}\tau + \phi_1) \quad (6.10)$$

$$\text{Velocidad} = X_1' = A\bar{\omega} \cos(\bar{\omega}\tau + \phi_1')^* \quad (6.11)$$

$$\text{Aceleración} = X_1'' = -A\bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega}\tau + \phi_1'') \quad (6.12)$$

$$\text{"Jerk"} = X_1''' = -A_3 \cos(\bar{\omega}\tau + \phi_1''') \quad (6.13)$$

Siendo

$$A_3 = A\bar{\omega}^3 = |X_1'''|_{\max} \quad (6.14)$$

Si en (6.10), (6.11), (6.12) y (6.13) se sustituye el valor de  $\bar{\omega} = 1$ , que corresponde a la frecuencia natural de la rueda. Se obtienen los siguientes valores máximos para la amplitud de: el desplazamiento, velocidad, aceleración y aceleración segunda del cuerpo principal del vehículo.

---

\*  $\phi_1'$  no denota derivada, es solo una distinción entre los diferentes  $\phi$

|                     |                    |
|---------------------|--------------------|
| Desplazamiento      | $A = \alpha Y_0$   |
| Velocidad           | $A_1 = \alpha Y_0$ |
| Aceleración         | $A_2 = \alpha Y_0$ |
| Aceleración segunda | $A_3 = \alpha Y_0$ |

Donde se puede apreciar que cuando  $\bar{\omega} = 1$ , tanto la amplitud máxima del desplazamiento del cuerpo principal, como la amplitud máxima de sus derivadas sucesivas, son independientes del valor que  $\gamma$  pueda tener.

Este resultado es muy importante, pues de él se colige inmediatamente, para  $\bar{\omega} = 1$ , que corresponde a la frecuencia natural de la rueda  $[\omega_{n2}]$ , el control no tendrá ningún efecto en el comportamiento del sistema en cuanto se refiere a los valores absolutos máximos de las variables; pudiendo así producirse otros efectos secundarios, como alterar los ángulos de fase, o cambiar la fuerza sobre la rueda.

Si a la expresión de la máxima aceleración segunda, dada por (6.16), se la aplica el concepto de optimización del  $\min \{X_1'''\}$  se sigue:

Derivando  $A_3$  con respecto a  $\gamma$ , y igualando esta derivada a 0.

$$\frac{d(A_3)}{d\gamma} = 0 \quad (6.16)$$

Se obtiene la siguiente expresión para  $\gamma$ .

$$\gamma = \frac{-\omega^4 + (1 + \beta + \beta\alpha)\bar{\omega}^2 - \beta\alpha}{\bar{\omega}^4 - \bar{\omega}^2} \quad (6.17)$$

El valor de  $\gamma$  dado por (6.17) es un extremo relativo, el cual es un máximo relativo, que tendrá diferentes valores para cada valor de  $\bar{\omega}$ .

Cuando el valor de  $\gamma$ , dado por (6.17) se introduce en las expresiones de desplazamiento, velocidad y aceleración y aceleración segunda, se obtendrán los valores máximos de estas variables, por lo tanto este valor de  $\gamma$  torna el sistema lo peor posible.

Si en (6.8) se toma el límite cuando  $\gamma$  va a infinito se obtiene que  $A \rightarrow 0$ . Esto hace que un valor de  $\gamma$  infinito torne óptima la ley de control asumida, aunque en  $\gamma = \text{infinito}$  el sistema es teóricamente inestable.

#### 6.4 - Disminución de la Frecuencia Natural de la Masa Principal y de su Razón de Amortiguamiento.

Conforme se aumenta  $\gamma$  la masa principal aumenta en una forma aparente como:

$$M' = (\gamma + 1) M \quad (6.18)$$

Donde  $M'$  es el valor de la masa aparente.

Este aumento aparente de la masa, produce los nuevos valores de la frecuencia natural de la masa principal y su razón de amortiguamiento que están dados por:

$$\omega'_{n1} = \frac{\omega_{n1}}{\sqrt{\gamma + 1}} \quad (6.19)$$

$$\zeta' = \frac{\zeta}{\sqrt{\gamma + 1}} \quad (6.20)$$

Donde  $\omega'_n$  y  $\zeta'$  son los valores de la frecuencia natural de la masa principal y su razón de amortiguamiento puede observar que cuando  $\gamma$  es infinito, tanto  $\zeta'$  como  $\omega'_{n1}$  nulos. Este es el caso ideal.

#### 6.5 - Fuerza sobre la Rueda

Es muy importante conocer la fuerza que actúa sobre la rueda.

Si la fuerza sobre la rueda es muy grande puede suceder lo siguiente:

- a) Una fuerza hacia abajo, puede destruir la rueda comprimiéndola contra el suelo.
- b) Una fuerza hacia arriba, en el caso real de un automovil, puede despegar la rueda del suelo, perdiéndose el contacto con el mismo, lo que no es deseable.

La fuerza entre el suelo y la rueda está compuesta de dos partes:

- a) Una fuerza que se puede llamar estática y es producida por el peso total del automovil;
- b) Una fuerza dinámica que aparece cuando el automovil esta bajo

perturbaciones externas, es decir cuando el sistema vibra. Esta fuerza dinámica aparece por razón de las aceleraciones que tienen la masa principal y la rueda.

Esta fuerza dinámica es la más importante en el presente estudio, pues se quiere analizar cual es el efecto del control sobre la fuerza entre la rueda y el suelo, y ésta será la única fuerza que se manifiesta cuando el control está funcionando.

El módulo de la fuerza dinámica máxima entre la rueda y el suelo, ( $f_r$ ) está dada por:

$$f_r = M\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 \quad (6.21)$$

Que en la forma normalizada puede escribirse como

$$F_r = MX_1'' + mX_2'' \quad (6.22)$$

Donde

$F_r$  = fuerza "adimensional" dinámica máxima entre la rueda y el suelo.

$$X_2'' = \bar{\omega}^2 B \text{ siendo } B \text{ dado por (6.9)}$$

Cuando  $\bar{\omega} = 0$  ;  $X_1'' = 0$  y  $X_2'' = 0$ ; siendo así la fuerza dinámica entre el suelo y la rueda nula para una excitación nula.

Cuando  $\bar{\omega} = 1$  se tiene que  $X_1'' = Y_0 \alpha$ , ecuación (6.15)

y que:



$$x_2'' = \frac{Y_0 [1 - \gamma + \beta\alpha]^2 + 4\zeta^2\alpha}{\beta + 4\zeta^2}$$

Quedando la fuerza dinámica entre la rueda y el sue  
lo expresada como:

$$F_r = Y_0 \left\{ M\alpha + m \frac{[\gamma(1 - \gamma + \beta\alpha)^2 + 4\zeta^2\alpha]}{\beta + 4\zeta^2} \right\} \quad (6.24)$$

Ahora como  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\zeta$  son positivos, conforme se aumen  
ta  $\gamma$ , el módulo de la fuerza dinámica entre la rueda y el suelo au  
menta, teniendo un valor infinito cuando  $\gamma = \infty$ .

Si la fuerza dinámica llegase a ser igual a la fuerza  
estática, la cual equivale al peso del automovil. La fuerza to  
tal entre la rueda y el suelo sería nula. En este caso práctico  
la rueda perdería contacto con el suelo.

#### 6.6 - Análisis Numérico del Sistema Activo con la Ley de Control

$$\underline{U = \gamma X_1''}$$

Para estudiar en una forma más completa el efecto  
de la ley de control sobre el comportamiento del sistema.

Se hizo un estudio numérico para un sistema de suspen  
sión de un automovil típico cuyos datos se muestran en la tabla  
6.1, con sus valores derivados. Estos valores típicos de  $M$ ,  $m$ ,  $k_1$ ,  
 $k_2$  y  $b$ , usados para resolver (6.8) y (6.22) fueron tomados de [20].

TABLA 6.1 - Valores Típicos de los Elementos Pasivos de Una Suspensión de Automovil y sus Derivados

| ELEMENTO      | VALOR  | UNIDADES                   |
|---------------|--------|----------------------------|
| M             | 600    | kg                         |
| m             | 40     | kg                         |
| $k_1$         | 150    | N/cm                       |
| $k_2$         | 1500   | N/cm                       |
| b             | 2400   | $\frac{N - \text{seg}}{m}$ |
| $\zeta$       | 0.40   | adimensional               |
| $\beta$       | 0.10   | adimensional               |
| $\alpha$      | 0.067  | adimensional               |
| $\omega_{n1}$ | 0.50   | rd/seg                     |
| $\omega_{n2}$ | 6.15   | rd/seg                     |
| $\tau$        | 6.15 t | adimensional               |

Para el análisis numérico se preparó un programa de computador para ser corrido en un computador digital IBM-1130.

Con este programa se encuentra la variación del valor máximo de:

- a) Desplazamiento ( $A$ )
- b) Velocidad ( $A_1$ )
- c) Aceleración ( $A_2$ )
- d) Aceleración segunda ( $A_3$ )

y también la fuerza máxima sobre la rueda ( $F_r$ ). Esto se lo hace

```
C      ESTE PROGRAMA RESUELVE LA VARIABLE MAXIMA (X)MAX
C      DE UN SISTEMA DE SUSPENSION DE AUTOMOVIL
      DIMENSION GAMA(50),OMEGA(50)
      LR=8
      LW=5
      READ(LR,20) NC,(GAMA(I),I=1,NC)
      READ(LR,20) NW,(OMEGA(I),I=1,NW)
20     FORMAT(I10,7F10.3,/(8F10.3))
      WRITE(LW,10)
10     FORMAT(/10X,'VALORES DEL CONTROL')
      WRITE(LW,30)(GAMA(I),I=1,NC)
30     FORMAT(/10X,8F10.4)
      WRITE(LW,40)
40     FORMAT(/10X,'VALORES DE LA FRECUENCIA DE EXITACION')
      WRITE(LW,30)(OMEGA(I),I=1,NW)
C      AMPLITUD DE LA FUERZA DE EXITACION
      FO=1.0
C      VALORES TIPICOS DEL AMORTIGUAMIENTO , RAZON DE
C      MASAS Y RAZON DE CONSTANTES DE RESORTE
      BETA=0.10
      PSI=0.40
      ALFA=0.067
      DO 1 J=1,NW
      WRITE(LW,60)OMEGA(J)
60     FORMAT(/10X,'VALOR DE LA FRECUENCIA',F10.4)
      WRITE(LW,70)
70     FORMAT(/10X,'CONTROL      AMPL      VEL      ACEL',4X,
1     'JERK      AMPL2      FUER2')
      DO 1 I=1,NC
      A=BETA**2+4.*PSI**2*OMEGA(J)**2
      B=(1.+GAMA(I))*OMEGA(J)**4
      C=(-1.-BETA-GAMA(I)-BETA*ALFA)*OMEGA(J)**2+BETA*ALFA
      D=(-2.*PSI-2.*PSI*ALFA)*OMEGA(J)**3+2.*PSI*ALFA*OMEGA(J)
      AMPL=FO*ALFA*SQRT(A/((B+C)**2+D**2))
      E=(-OMEGA(J)**2-GAMA(I)*OMEGA(J)**2+BETA*ALFA)**2
      F=(2.*PSI*OMEGA(J)*ALFA)**2
      AMPL2=FO*SQRT((E+F)/((B+C)**2+D**2))
      ACEL2=AMPL2*OMEGA(J)**2
      VEL=AMPL*OMEGA(J)
      ACEL=VEL*OMEGA(J)
      CJERK=ACEL*OMEGA(J)
      ACEL2=AMPL2*OMEGA(J)**2
      FUER2=600.0*ACEL+40.0*ACEL2
      WRITE(LW,50)GAMA(I),AMPL,VEL,ACEL,CJERK,AMPL2,FUER2
50     FORMAT(/F17.4,F9.4,F8.4,4F9.4)
1     CONTINUE
      CALL EXIT
      END
```

Figura 6.1. Listado del programa para resolver las ecuaciones de movimiento

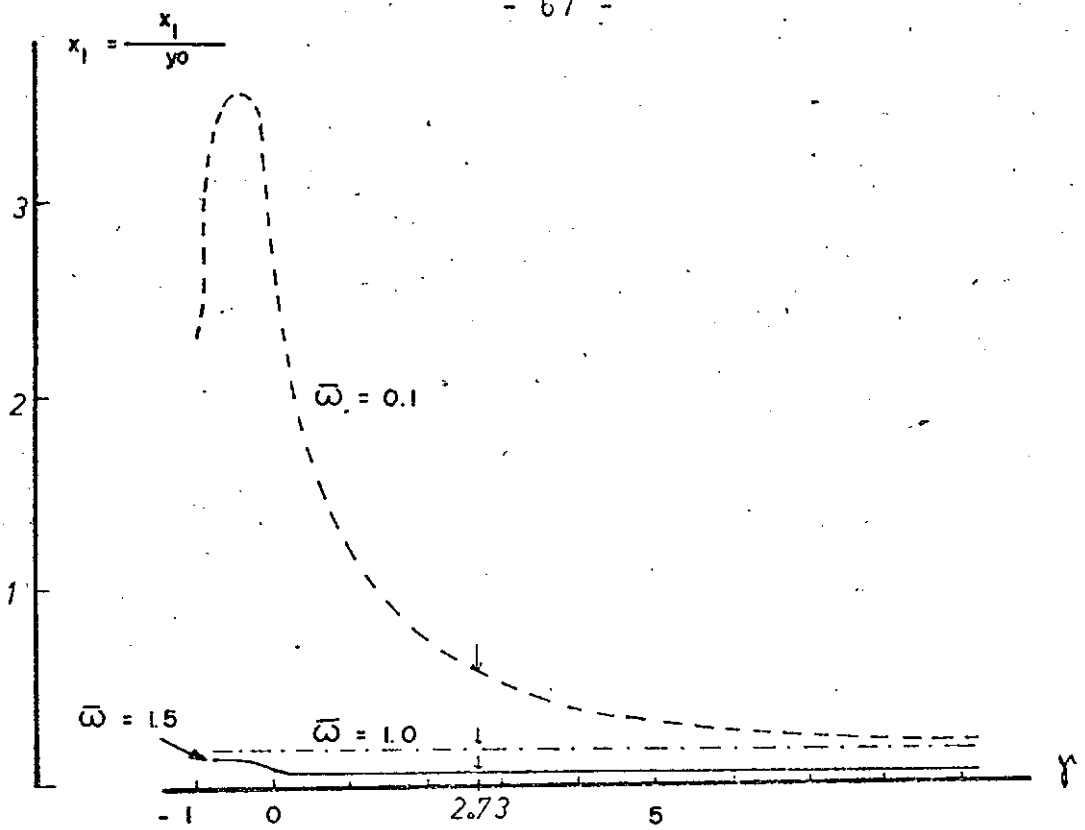


Figura 6-2 Desplazamiento de M vrs  $\gamma$

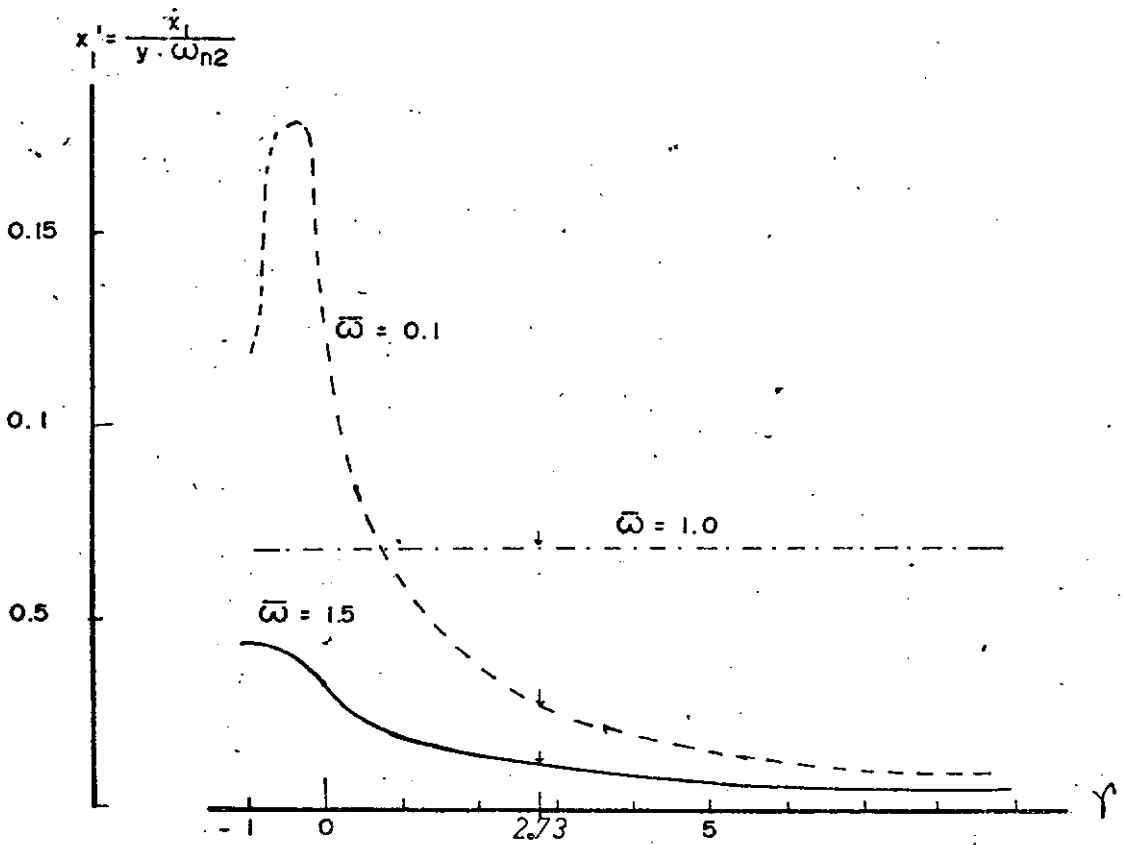


Fig. 6-3 Velocidad de M vrs  $\gamma$

$$\ddot{x}_1 = \frac{\ddot{x}_1}{y_0 \omega_n^2}$$

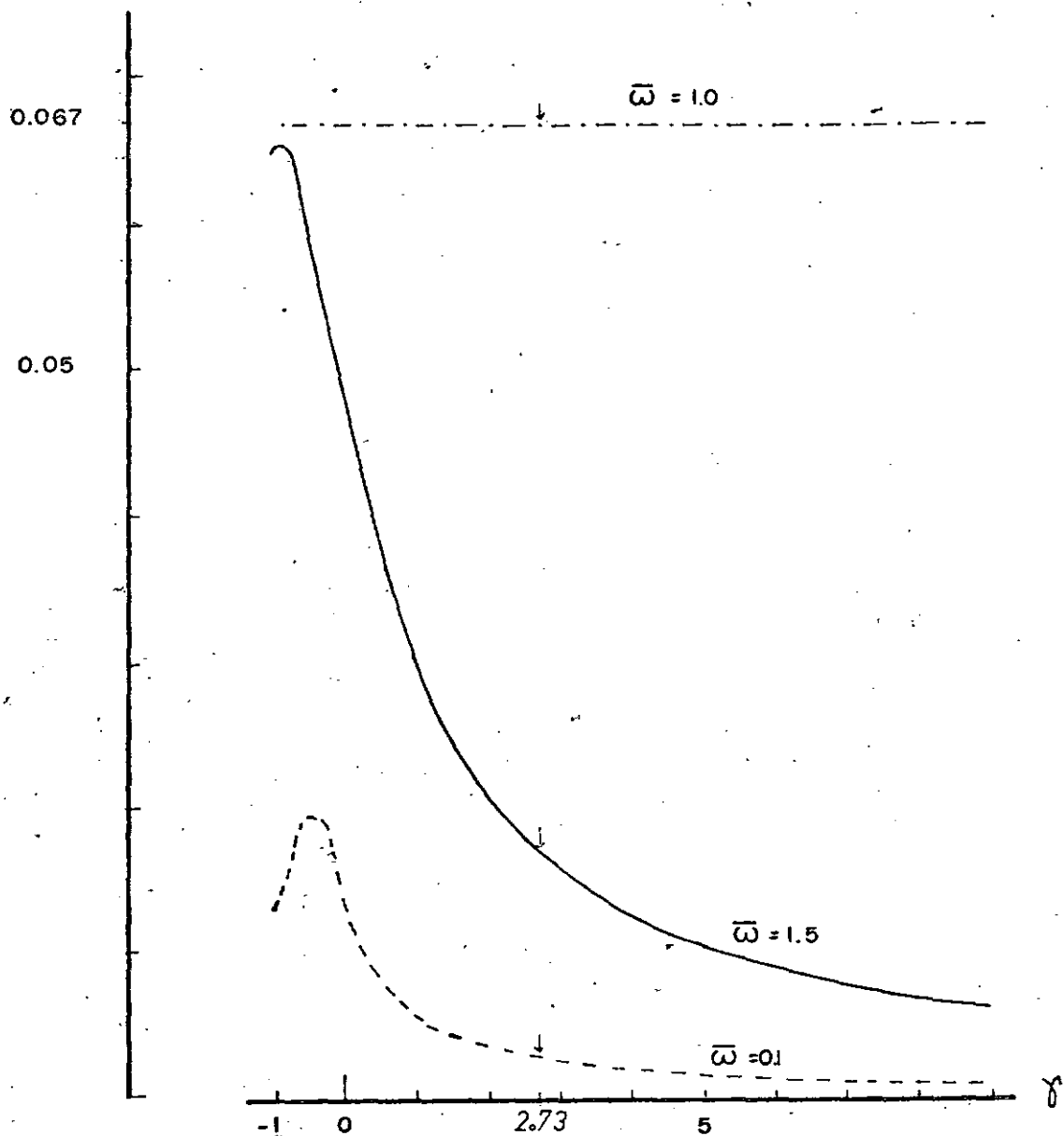


Fig. 6-4 Aceleración de M vrs  $\gamma$

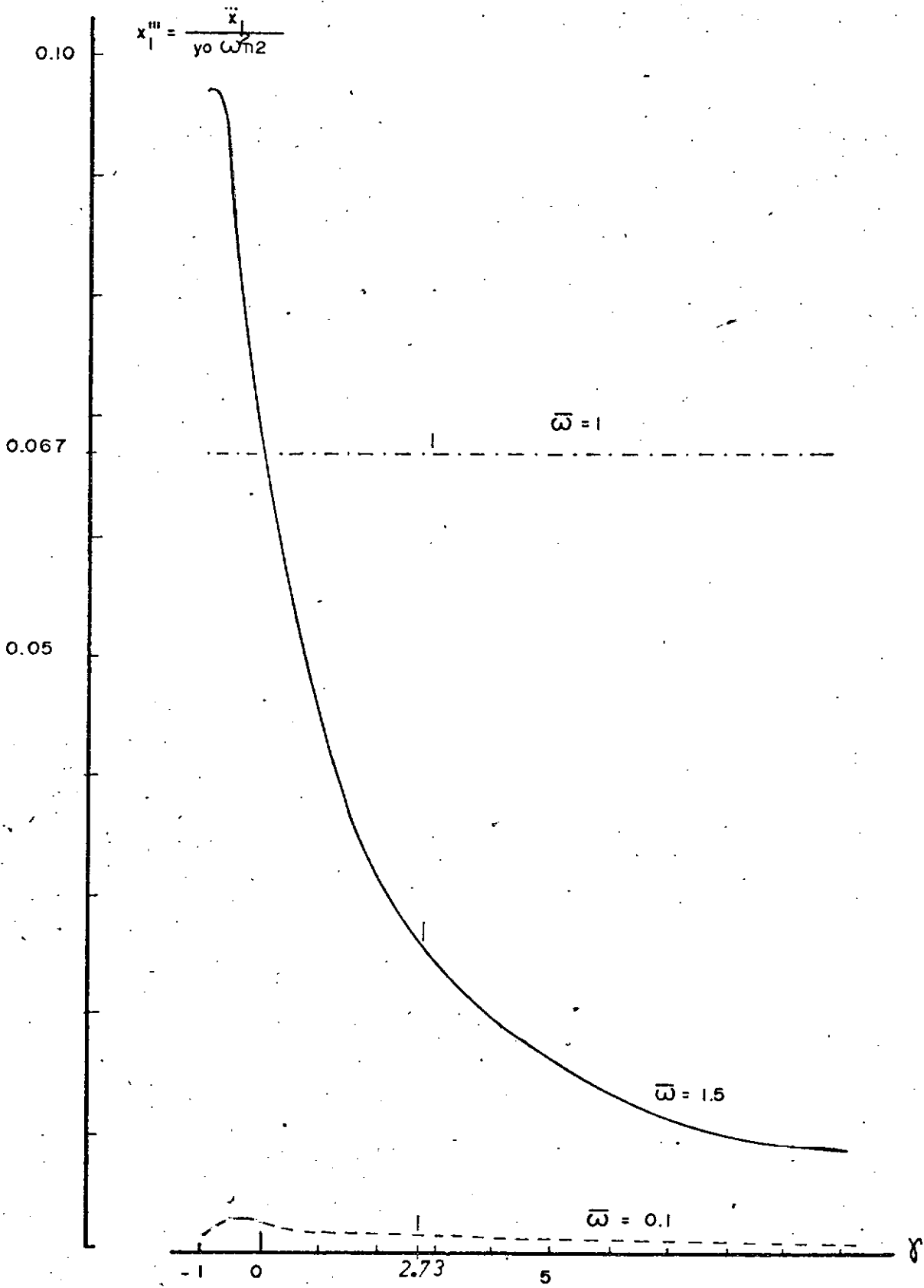


Fig. 6-5 "Jerk" de M vrs  $\gamma$

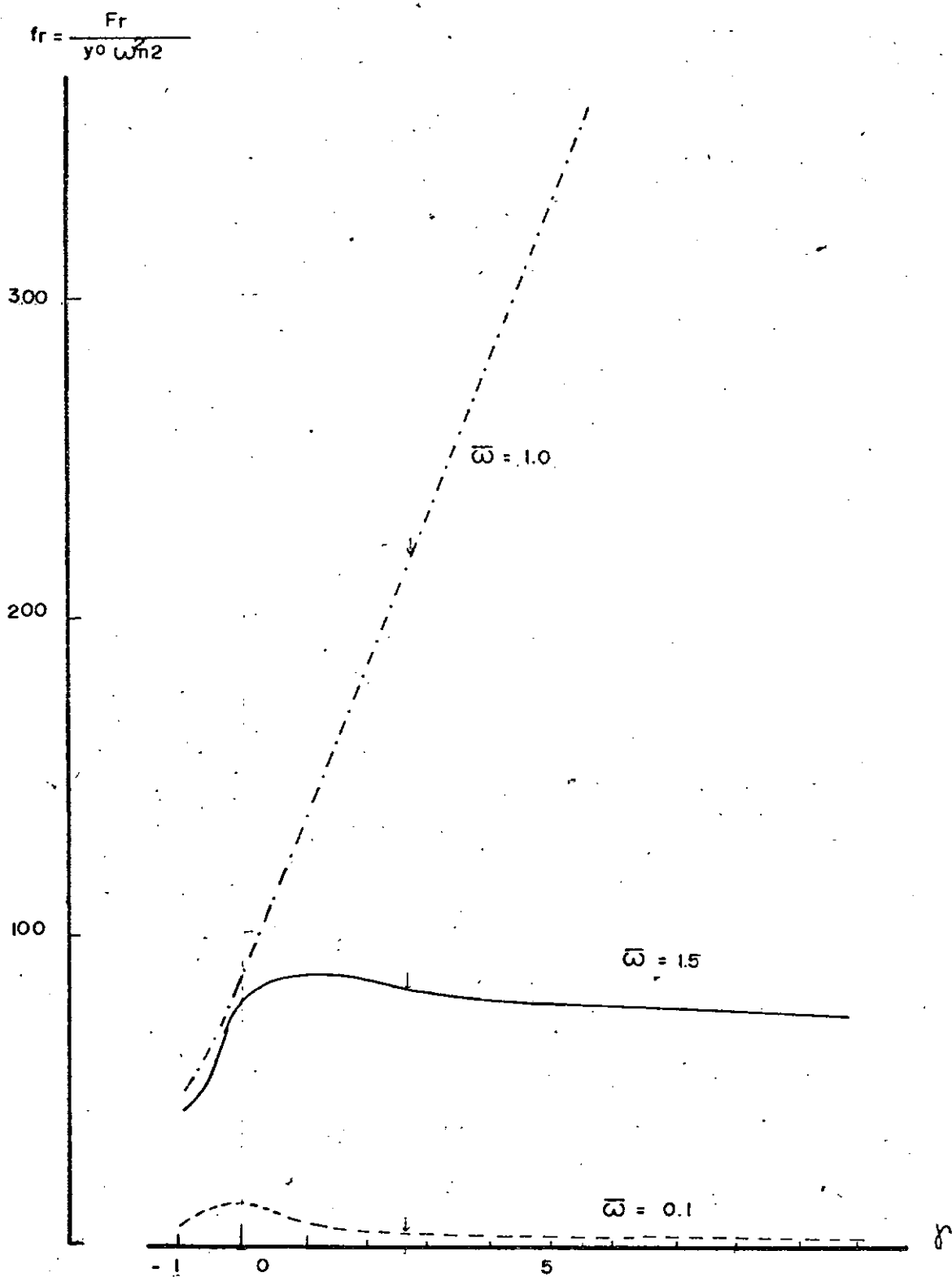


Fig. 6-6 Fuerza dinámica en la rueda vs  $\delta$

$$x_1 = \frac{x_1}{y_0}$$

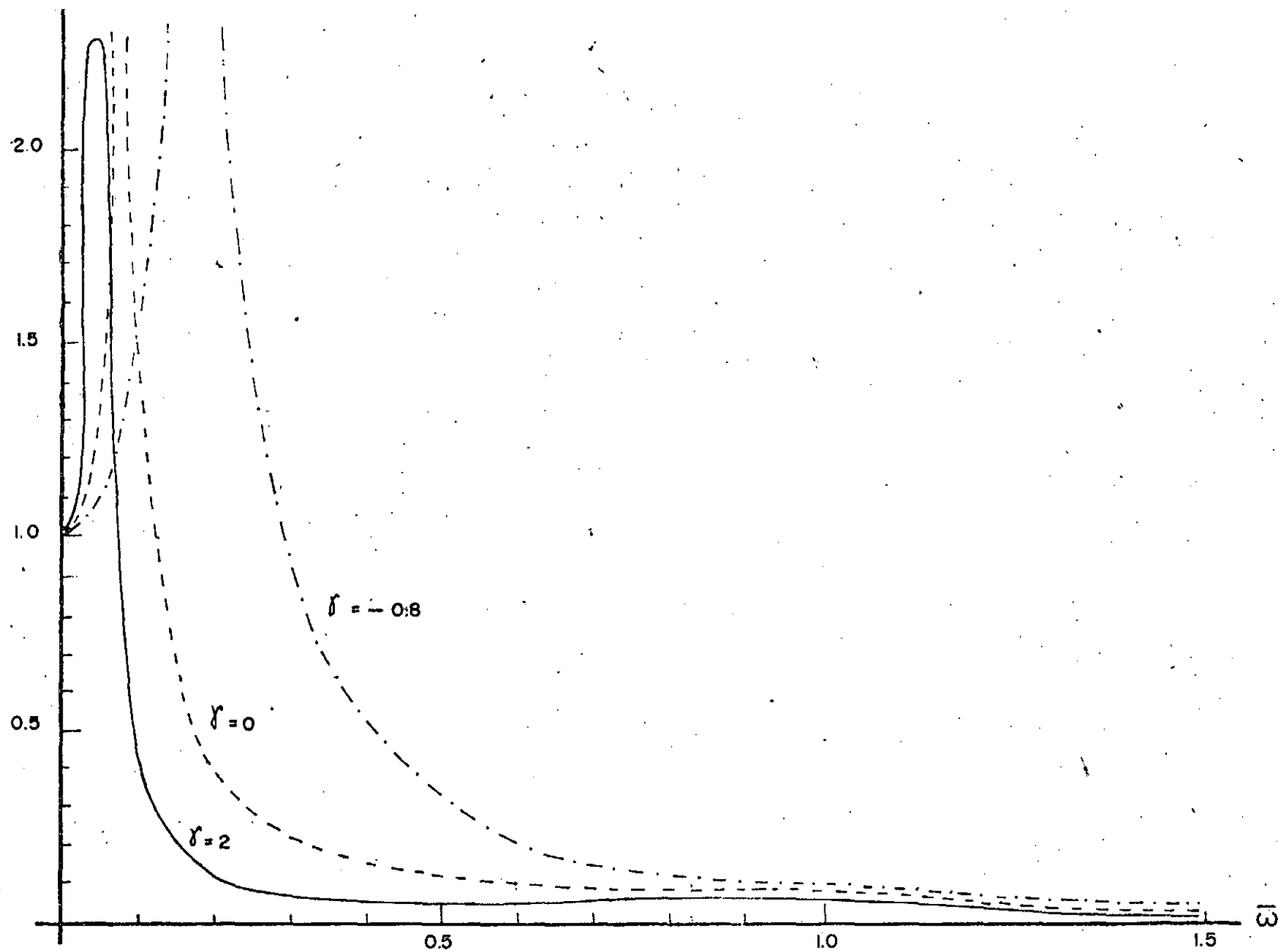


Fig. 6-7 Desplazamiento de M vrs  $\omega$



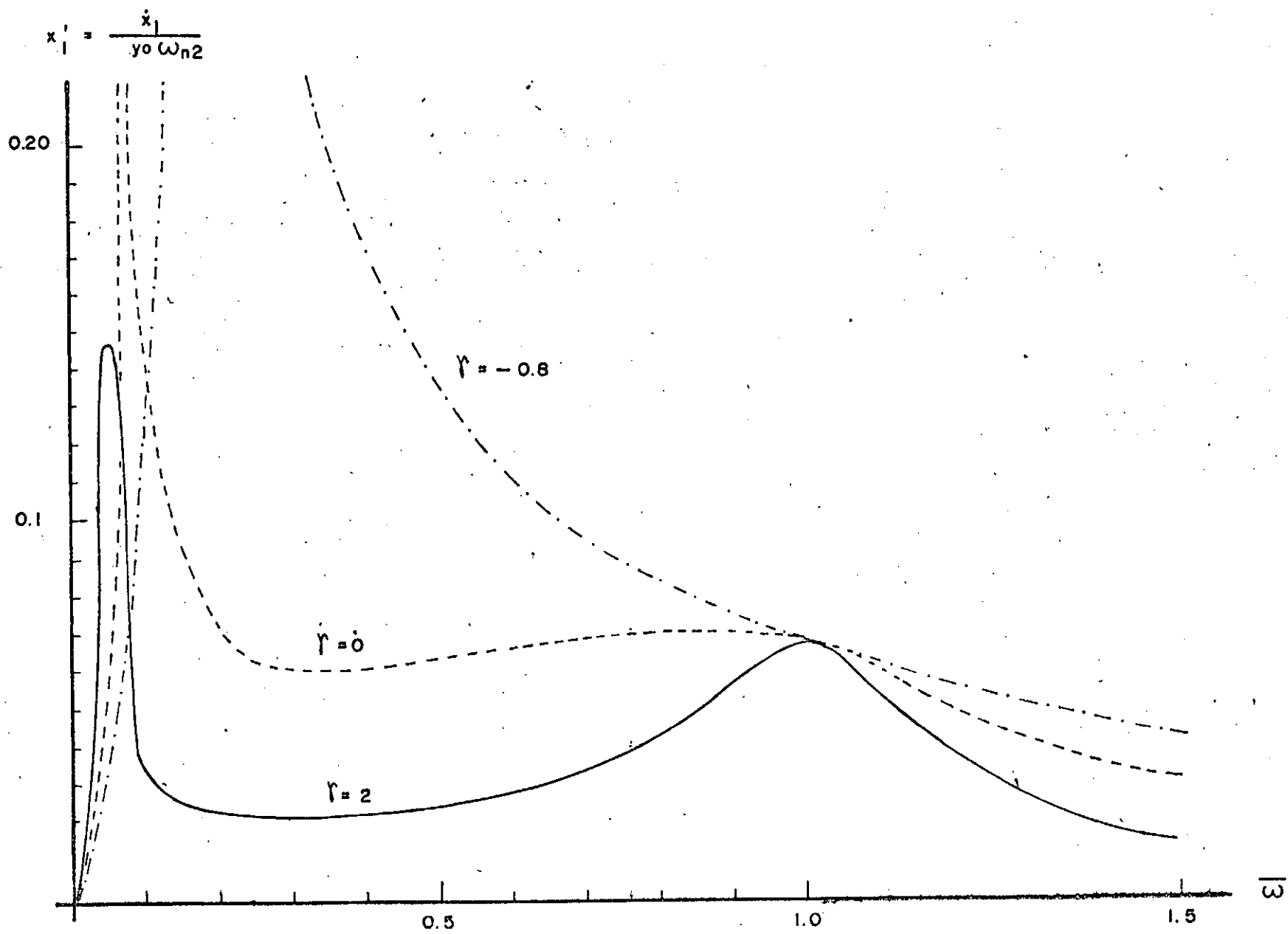


Fig. 6-8 Velocidad de M vrs  $\bar{\omega}$

$$\ddot{x}_1'' = \frac{\ddot{x}_1}{y_0 \omega_{n2}^2}$$

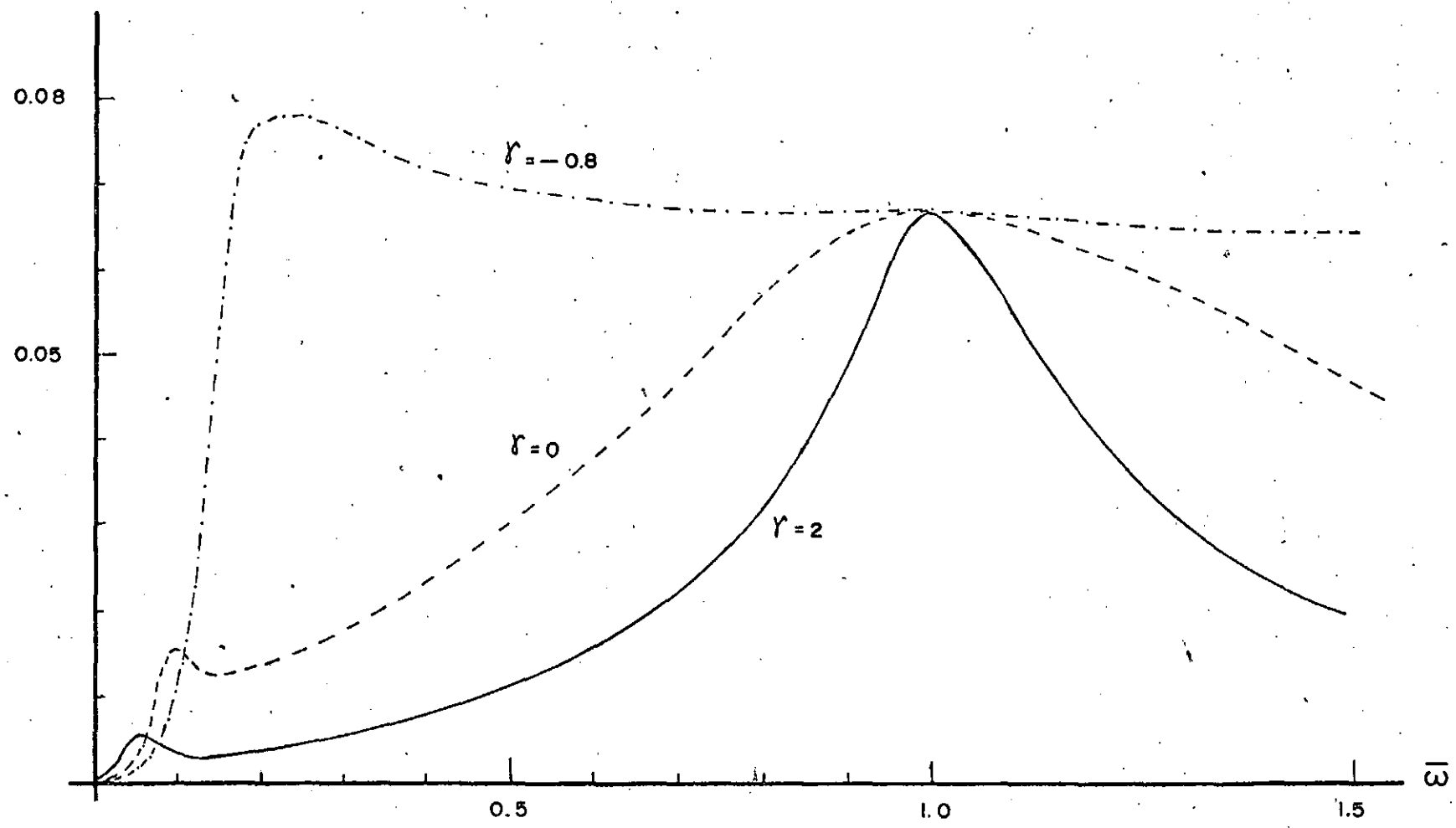


Fig. 6-9 Aceleración de M vs  $\bar{\omega}$

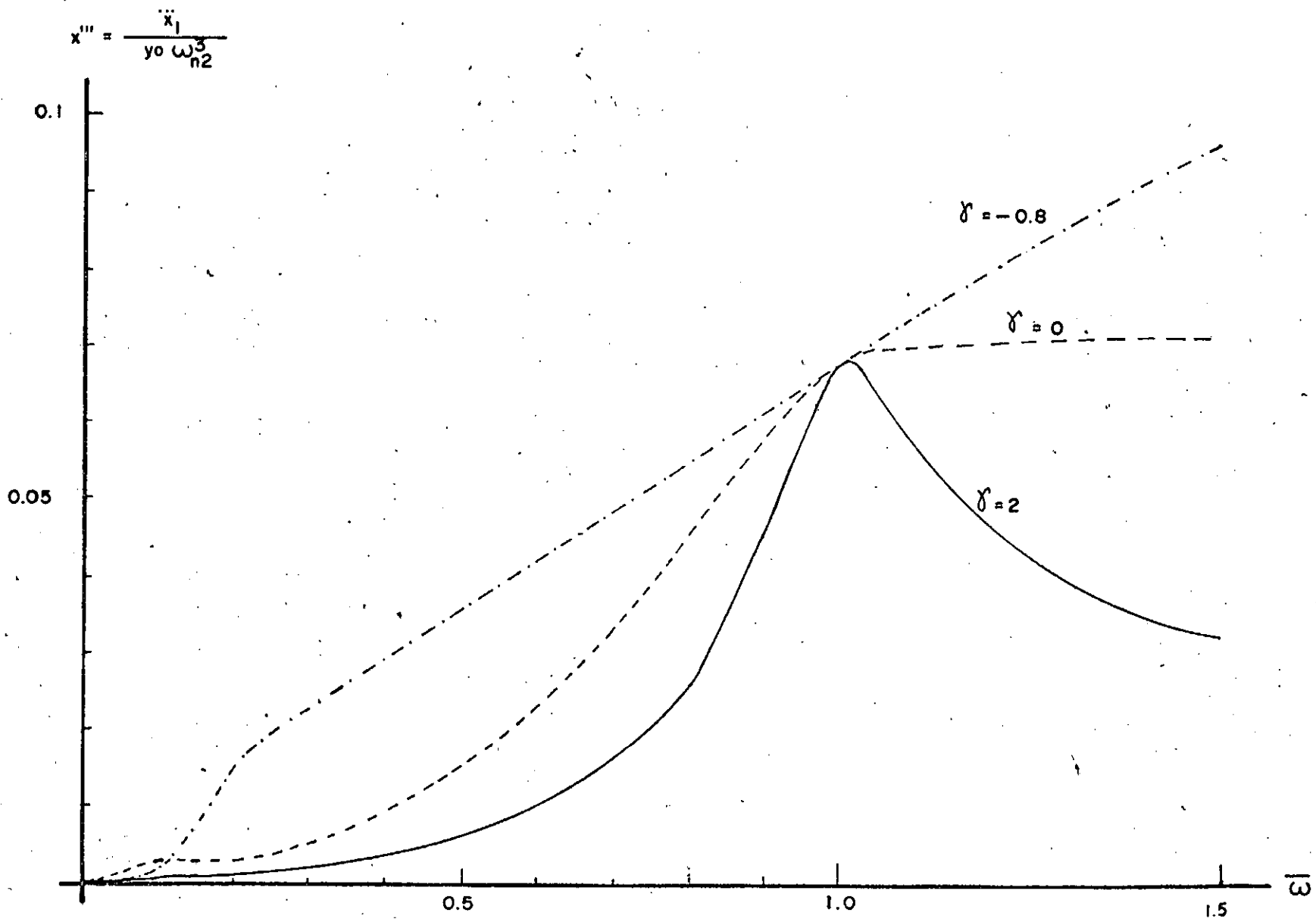


Fig. 6-10 "Jerk" vrs  $\bar{t}$

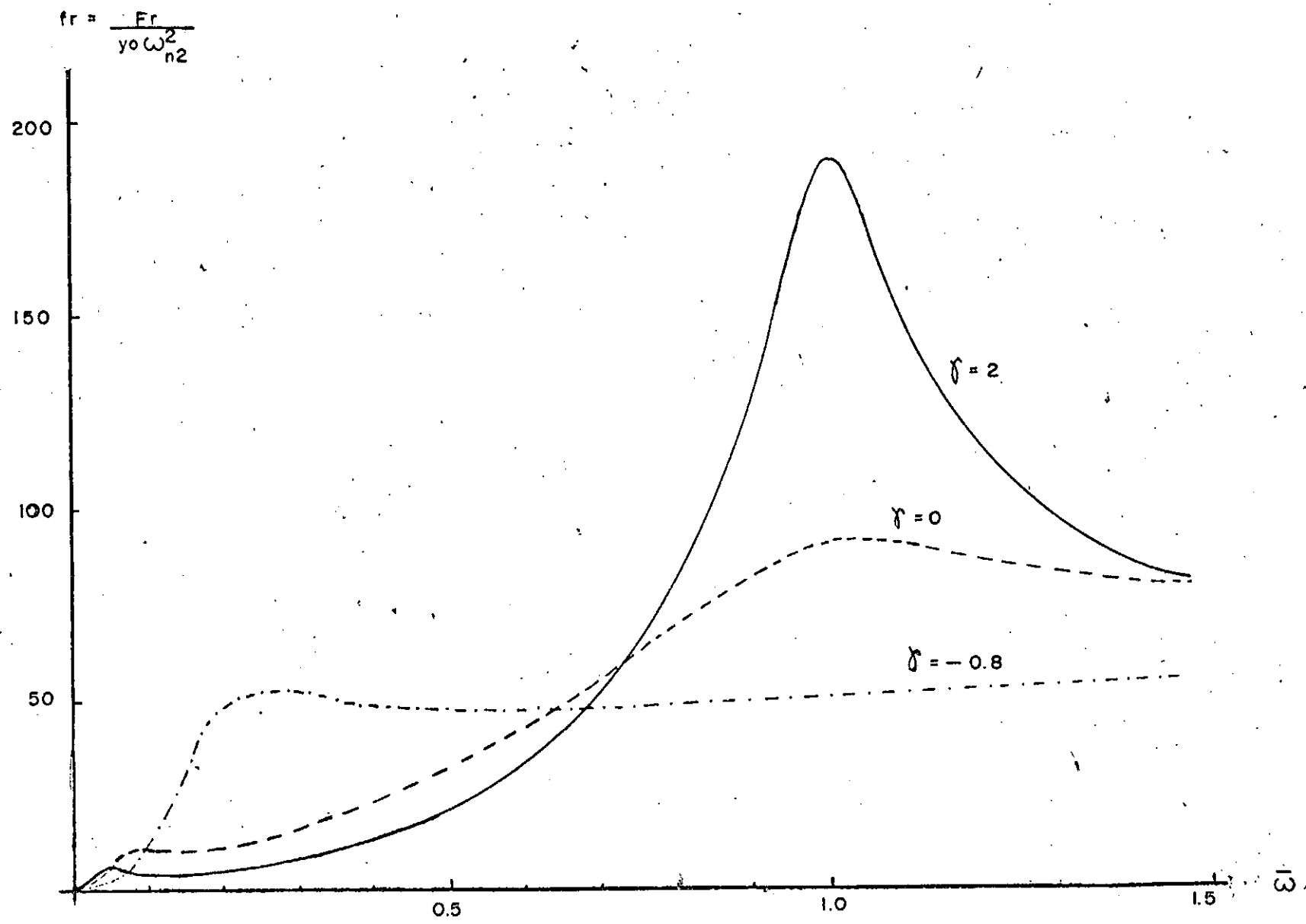


Fig. 6-11 Fuerza dinámica sobre la rueda vrs  $\bar{\omega}$

manteniendo  $\gamma$  constante a la vez que se varía  $\bar{\omega}$  y vice versa.

En la figura 6.1 se muestra el programa usado para este fin.

Los resultados obtenidos en computador digital, se muestran en una forma gráfica en las figuras que van de 6.2 a 6.11.

### PROBLEMA DE UNIDADES

Es necesario recordar que los valores en las figuras anteriores están en forma adimensional.

En la sección 2.4, las ecuaciones de movimiento se transformaron a esta forma adimensional. En esta sección se definió una longitud arbitraria  $L$ . Ahora bien si esta longitud  $L$ , se toma igual a la amplitud máxima,  $(y_0)$  de la irregularidad del camino supuesto senoide, ver figura 6.12; el valor  $\gamma_0 = y_0/L$  será 1, que es el valor que usó para resolver numericamente (6.8) y (6.22).

Esto hace que todos los valores en las figuras anteriores queden referidos al valor  $y_0$ , amplitud máxima de la irregularidad del camino. Ver figura 6.12.

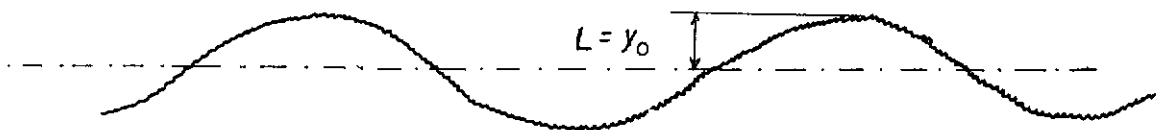


Figura 6.12 - Irregularidad del camino, senoide

Por ser el estudio aquí presentado una comparación entre el comportamiento del sistema activo con el pasivo, lo que es posible por ser el sistema tratado lineal; no importa el tipo de unidades usadas.

El trabajar con unidades adimensionales y normalizadas, permite una mayor facilidad en el cálculo, y una interpretación más fácil de los resultados.

Evidentemente, se puede fácilmente obtener los valores reales de los adimensionales.

#### DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS NUMÉRICOS

En las figuras de 6.2 a 6.5, se muestra la variación del valor máximo del desplazamiento, velocidad, aceleración y aceleración segunda del cuerpo principal con  $\gamma$ ; para  $\bar{\omega} = 0.1$ ,  $\bar{\omega} = 1.0$  y  $\bar{\omega} = 1.5$  (Recuerdese que  $\bar{\omega} = 1 = \omega_{n2} = 6.15$  rd/seg, y  $\bar{\omega} = 0.1 \approx \bar{\omega}_{n1}$ ).

Todas las cuatro figuras presentan las mismas características que son:

- 1 - Tal como se vio en teoría, cuando  $\bar{\omega} = 1$ , el control no tiene ningún efecto. Todas las "características" tienen el mismo valor,  $\alpha = 0.067$ .
- 2 - Conforme se aumenta  $\gamma$ , el valor máximo de las variables características disminuye, siendo su valor nulo cuando  $\gamma$  es infinito, este sería teóricamente el valor de  $\gamma$  que optimiza la ley de control.
- 3 - Para el caso particular del automovil, la mayor mejoría del sistema se consigue en cuando  $\gamma$  varía de 0 a 3 (ver las figu-

ras). A partir de  $\gamma = 3$  hasta  $\gamma = \text{infinito}$  la mejoría que se consigue en el sistema es baja.

- 4 - Para frecuencias altas, se consigue una gran mejoría en la aceleración, y aceleración segunda del cuerpo principal.
- 5 - Para frecuencias bajas se consigue una gran mejoría en el desplazamiento y en la velocidad del cuerpo principal.
- 6 - Para valores de  $\gamma$  entre -1 y 0, por regla general, el comportamiento del sistema empeora; pero para frecuencias menores que la frecuencia natural de la masa principal,  $\omega_{n1}$ , se consigue una leve disminución en el valor máximo de las características del sistema.
- 7 - Particularmente, se observa en la figura 6.5, que el valor de la aceleración segunda para  $\bar{\omega} = 1.5$ , pasa de un valor de  $X_j'' = 0.065$  con  $\gamma = 0$ , a un valor de  $X_j'' = 0.024$  para  $\gamma = 3.0$ . Obteniéndose así una mejoría en el confort del orden de 63%. Es decir el valor del "Jerk" en el sistema controlado es solo 37% del "Jerk" en el sistema sin controlar. Por otro lado cuando  $\bar{\omega} = 0.1$  la mejoría obtenida es de poca monta.
- 8 - En cuanto a la aceleración, se consigue una mejoría semejante a la conseguida en la aceleración segunda cuando  $\bar{\omega} = 1.5$ .
- 9 - El desplazamiento y la velocidad del cuerpo principal mejoran aproximadamente en 55% para frecuencias cercanas, pero mayores que la frecuencia natural del cuerpo principal,  $[\omega_{n1}]$ .

Nótese que en las figuras anteriores se ha dejado una pequeña marca en el punto  $\gamma = 2.73$ . Esto se explicará en el capítulo VII.

En las figuras 6.7 a 6.10 se han graficado los valores de las "características" del sistema contra la frecuencia de excitación "adimensional"  $\bar{\omega}$  para diferentes valores de  $\gamma$ ,  $\gamma = 0$  (sistema pasivo),  $\gamma = -0.8$  y  $\gamma = 2.0$ .

De estas curvas se obtiene la siguiente información

- 1 - Tal como en las gráficas anteriores se observa que para las frecuencias menores que la frecuencia natural del cuerpo principal ( $\omega_{n1}$ ), el sistema empeora para valores de  $\gamma$  mayores que cero, y mejora levemente para valores de  $\gamma$  entre 0 y -1. Para frecuencias mayores que  $\omega_{n1}$ , sucede lo contrario.
- 2 - Se observa nuevamente que para  $\bar{\omega} = 1$  ( $\bar{\omega} = 9.2$  rd/seg) el control no tiene ningún efecto.
- 3 - Se observa claramente que conforme aumenta  $\gamma$ , (aumento aparente de la masa principal), la frecuencia natural de la masa principal disminuye, siendo teóricamente nula cuando  $\gamma$  es infinito. Además conforme  $\omega_{n1}$  disminuye, el comportamiento de la masa suspensa mejora.
- 4 - En cuanto al desplazamiento de la masa principal (figura 6.7), se observan en la primera resonancia, valores muy altos, mayores que la deflexión estática, estos valores disminuyen conforme aumenta  $\gamma$ . En la segunda resonancia los valores de la amplitud son muy bajos, esta segunda resonancia parece haber desaparecido.
- 5 - Un fenómeno parecido al expuesto en 4 sucede con la velocidad (figura 6.8).



6 - La aceleración tiene un valor bajo en la primera resonancia, que aumenta sensiblemente cuando  $\gamma$  tiene un valor negativo (figura 6.9).

7 - En el sistema pasivo ( $\gamma = 0$ ), el "Jerk" tiene un valor casi constante para una frecuencia adimensional,  $\bar{\omega}$  mayor que 1.

Se nota a la vez una mejoría en el "confort" para valores de  $\gamma$  mayores que cero.

Para un  $\gamma$  negativo, el valor del "Jerk" crece sensiblemente para valores de  $\bar{\omega}$  mayores que 1.

En la figura 6.6, se tiene la variación de la fuerza máxima sobre la rueda cuando varía  $\gamma$  y se conserva  $\bar{\omega} = 0.1$ ,  $\bar{\omega} = 1.0$  y  $\bar{\omega} = 1.5$ .

De esta figura se puede obtener la siguiente información:

1 - Para valores de  $\gamma$  negativos variando entre 0 y -1, la fuerza dinámica entre la rueda y el suelo, es menor que en el sistema pasivo.

2 - Para frecuencias mayores ( $1.5 \bar{\omega}_{n2}$ ) y menores ( $0.1 \bar{\omega}_{n2}$ ) que  $\bar{\omega}_{n2}$ , la fuerza dinámica entre la rueda y el suelo varía muy poco al aumentar  $\gamma$ , con una tendencia a disminuir.

3 - Cuando la frecuencia de excitación corresponde a  $\bar{\omega}_{n2}$  ( $\bar{\omega} = 1$ ), la fuerza dinámica sobre la rueda aumenta vertiginosamente cuando se aumenta  $\gamma$ . Por ejemplo cuando  $\gamma$  pasa de 0 a 3, se produce un aumento de 200% en esta fuerza dinámica.

En  $\bar{\omega} = 1$ , la fuerza dinámica sobre la rueda es muy grande cuando se aumenta en una forma aparente la masa principal, es-

to puede destruir la rueda o arrancarla del suelo.

En la figura 6.11 se tiene la variación de la fuerza dinámica máxima sobre la rueda, cuando se varía  $\bar{\omega}$  y se mantiene  $\gamma = 0$ ,  $\gamma = -0.8$  y  $\gamma = 2.0$ .

De esta figura se obtiene la siguiente información.

- 1 - Para frecuencias de excitación variando entre  $0.05 \omega_{n2}$  y  $0.7 \omega_{n2}$  se tiene que: cuando  $\gamma = 2.0$ , la fuerza dinámica sobre la rueda es menor que en el caso pasivo. Es decir, se mejora el comportamiento del sistema a la vez que se disminuye la carga dinámica sobre la rueda. Si  $\gamma = -0.8$ , en esta misma situación, la carga dinámica sobre la rueda es mayor que en el caso pasivo. Es decir, el sistema empeora a la vez que se está aumentando la carga sobre la rueda.
- 2 - Para frecuencias mayores que  $\omega_{n2}$ , la fuerza sobre la rueda tiende a disminuir, por ejemplo cuando  $\gamma = 2.0$  y  $\bar{\omega} = 1.5$ , la fuerza dinámica sobre la rueda es igual que en el sistema pasivo. En esta situación se ha conseguido una mejora en el comportamiento del sistema sin aumentar la carga sobre la rueda.
- 3 - Para valores de  $\bar{\omega}$  cercanos a 1, los valores de la carga sobre la rueda son mayores en el sistema controlado que en el pasivo cuando  $\gamma$  es positivo; por otro lado cuando  $\gamma$  es negativo sucede lo contrario. Por ejemplo cuando  $\gamma = 2.0$  y  $\bar{\omega}$  varía entre  $0.7 \bar{\omega}$  y  $1.4 \bar{\omega}$ , la carga dinámica sobre la rueda es mayor que en el caso pasivo. Siendo esta carga máxima en  $\bar{\omega} = 1$ .

## 6.7 - Conclusión sobre los Resultados Analítico-Numéricos

En esta sección se resumen los principales resultados obtenidos en el estudio analítico-numérico del sistema.

- 1 - En general, las "características" del sistema disminuyen conforme se aumenta  $\gamma$ .
- 2 - Teóricamente el valor de  $\gamma$  puede aumentarse indefinidamente, siendo  $\gamma = \infty$  el valor que optimiza la ley de control.
- 3 - En el caso particular del sistema de suspensión de automóvil analizado. La mayor mejora se consigue al aumentar  $\gamma$  hasta 3, a partir de este valor la mejora en el sistema que se consigue con aumentar  $\gamma$  es de poca monta.
- 4 - Para  $\bar{\omega} = 1$  (frecuencia natural de la rueda,  $\omega_{n2}$ ), el control no tiene ningún efecto sobre los valores máximos de las variables características del sistema. Para esta frecuencia el comportamiento del sistema no mejora.
- 5 - El mayor grado de mejora para el automóvil estudiado, en cuanto a comodidad se refiere, se consigue para frecuencias de excitación mayores que la frecuencia natural de la rueda. Aunque para frecuencias de excitación variando entre  $\omega_{n1}$  y  $\omega_{n2}$ , por ejemplo  $\omega = 0.5 \omega_{n2}$  se consiguen mejoras del orden del 50% en el confort.
- 6 - Para frecuencias diferentes de  $\omega_{n2}$ , la fuerza dinámica sobre la rueda se mantiene casi constante conforme se aumenta  $\gamma$ , tendiendo más bien a disminuir.
- 7 - Cuando  $\bar{\omega} = 1$ , aunque no se consigue ninguna mejora en el comportamiento del cuerpo principal cuando se aumenta  $\gamma$ . La fuer

za dinámica sobre la rueda aumenta enormemente, teniendo esta fuerza un valor infinito cuando  $\gamma$  es infinito; esto no mejora el sistema, pero si puede destruir la rueda o hacerla perder contacto con el suelo.

## VII - SIMULACION DEL SISTEMA EN EL COMPUTADOR ANALOGICO

### 7.1 - Introducción

Cuando se quiere estudiar un sistema dinámico, la mejor forma de hacerlo, es recurriendo al computador analógico para simular el sistema.

En el computador analógico se observa directamente lo que está sucediendo con el sistema, fácilmente se pueden cambiar cualesquiera condiciones y además se puede medir cualquier valor deseado.

El computador analógico es excelente para el estudio de la estabilidad del sistema, pues toma en cuenta todos los factores que influyen en el sistema, lo cual por su complejidad, no se consigue en una forma analítica.

### 7.2 - Escogencia de la ley de control

El primer uso que se le dió al computador analógico fue de escoger la ley de control.

Para tal fin se simulaban las ecuaciones de movimiento del sistema con una ley de control genérica  $U(t)$ , ecuaciones (2.7). Se excitó el sistema con una fuerza senoidal o un desplazamiento, sobre la rueda, y se probaron varias leyes de control. Se observó cualitativamente la influencia de cada uno de los vectores de control, concluyéndose que la ley de control  $U = \ddot{ax}_1$ , en forma normalizada  $U = \gamma \ddot{X}_1$ , es la ley de control más simple que produce las mayores mejoras en el comportamiento del sistema.

En el Capítulo IV se discutió teóricamente la escogencia de esta ley de control.

### 7.3 - Diagrama de Flujo para el Computador Analógico

Para simular el sistema se usó un computador analógico del tipo EAI, TR-48.

El circuito montado en el computador analógico, es relativamente complejo. Para simplificar su interpretación, el circuito total se divide en 3 subcircuitos, a saber:

- a) Circuito del sistema
- b) Circuito para la excitación
- c) Circuito para medir el máximo valor de una variable

A continuación se presenta un pequeño análisis en el montaje de cada circuito, con el diagrama correspondiente.

#### a) Circuito del Sistema

Para obtener el circuito del sistema, se procede de la siguiente forma.

Se toman las ecuaciones de movimiento del sistema, escritas de la siguiente manera. Ecuaciones (6.3)

$$X_1'' = -\beta\alpha (X_1 - X_2) - 2\zeta\alpha (X_1' - X_2') - \gamma X_1'' \quad (7.1a)$$

$$X_2'' = +\beta (X_1 - X_2) + 2\zeta(X_1' - X_2') - X_2 + \frac{\gamma}{\alpha} X_1'' + Y_e \quad (7.1b)$$

$Y_e = Y_0 \sin \bar{\omega}\tau$ , es la excitación externa

Derivando (7.1a) con respecto a  $\tau$ , se obtiene:

$$X_1''' = -\beta\alpha (X_1' - X_2') - 2\zeta\alpha (X_1'' - X_2'') - \gamma X_1'''$$

$$X_1''' = -\frac{\alpha}{1+\gamma} \left[ \beta (X_1' - X_2') + 2\zeta (X_1'' - X_2'') \right] \quad (7.2)$$

La ecuación (7.2) es la expresión para la aceleración segunda (Jerk). Tomando las ecuaciones (7.1) y (7.2), se simula el sistema cuyo circuito se muestra en la figura 7.1.

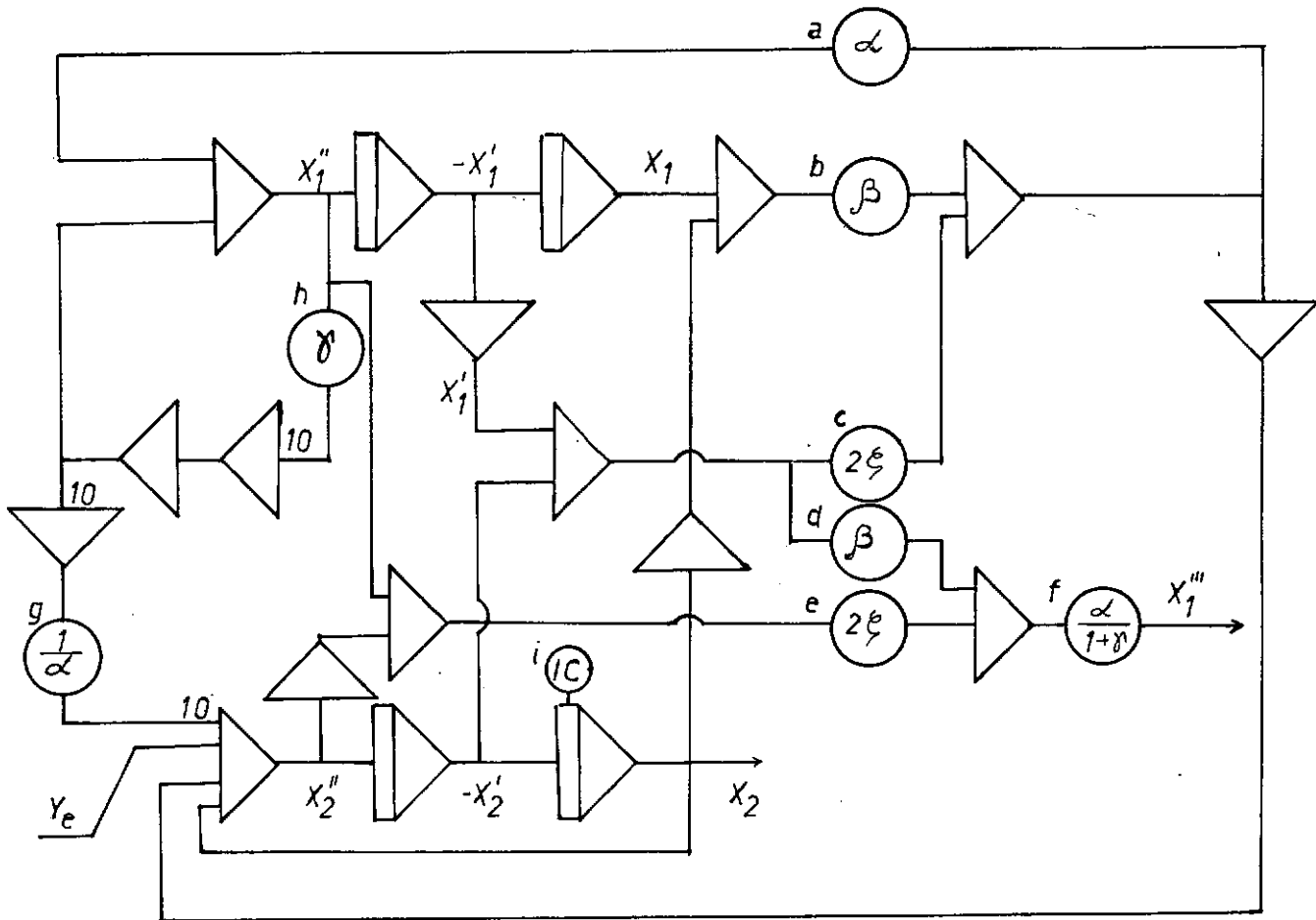


Figura 7.1 - Diagrama de flujo para la simulación del sistema en el computador analógico.

b) Circuito para la Excitación

En la figura 7.2 se muestra un simple circuito que produce una onda senoidal del tipo.

$$Y_e = Y_0 \text{ sen } \bar{\omega} \tau$$

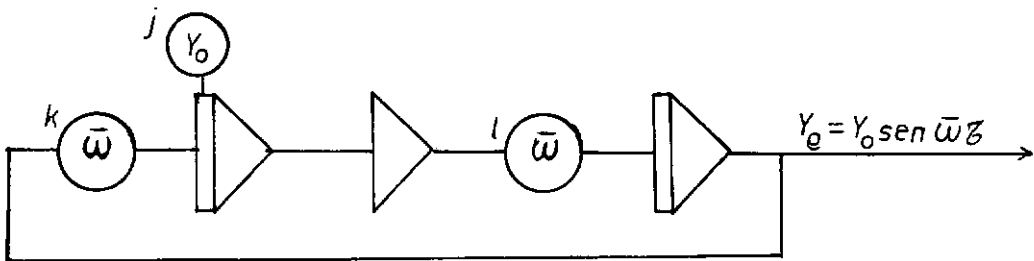


Figura 7.2 - Diagrama de flujo para producir una senoide en el computador analógico.

c - Circuito para medir el máximo valor de una variable [8]

Cuando se tiene una señal  $X(t)$  que varía con el tiempo, a veces se necesita el máximo valor de esta señal, principalmente en los problemas de optimización, cuando se usa el criterio de  $\min \max X(t)$ .

Este problema surgió en la presente investigación, aunque se tenían señales  $X(t)$ , del tipo senoidal, para "altas" frecuencias de excitación; no era posible medir los valores máximos de las variables "características".

Por tal razón fue necesario usar un circuito para medir el máximo valor de una señal. Este circuito se muestra en la figura 7.3.



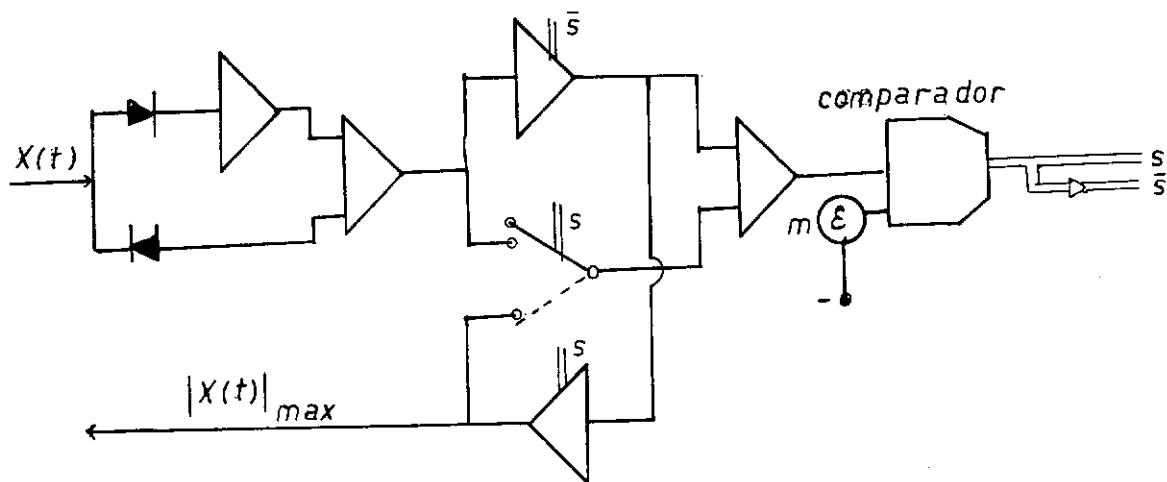
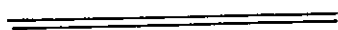


Figura 7.3 - Diagrama de flujo para medir el máximo valor absoluto de una señal.

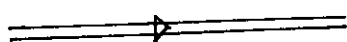
Para dejar clara la buena interpretación de los diagramas de flujo mostrados en las figuras de 7.1 e 7.3, se muestra en la figura 7.4 el significado de cada símbolo usado en las figuras anteriores:



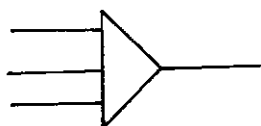
señal analógica



señal lógica



complemento de la señal lógica.



sumador

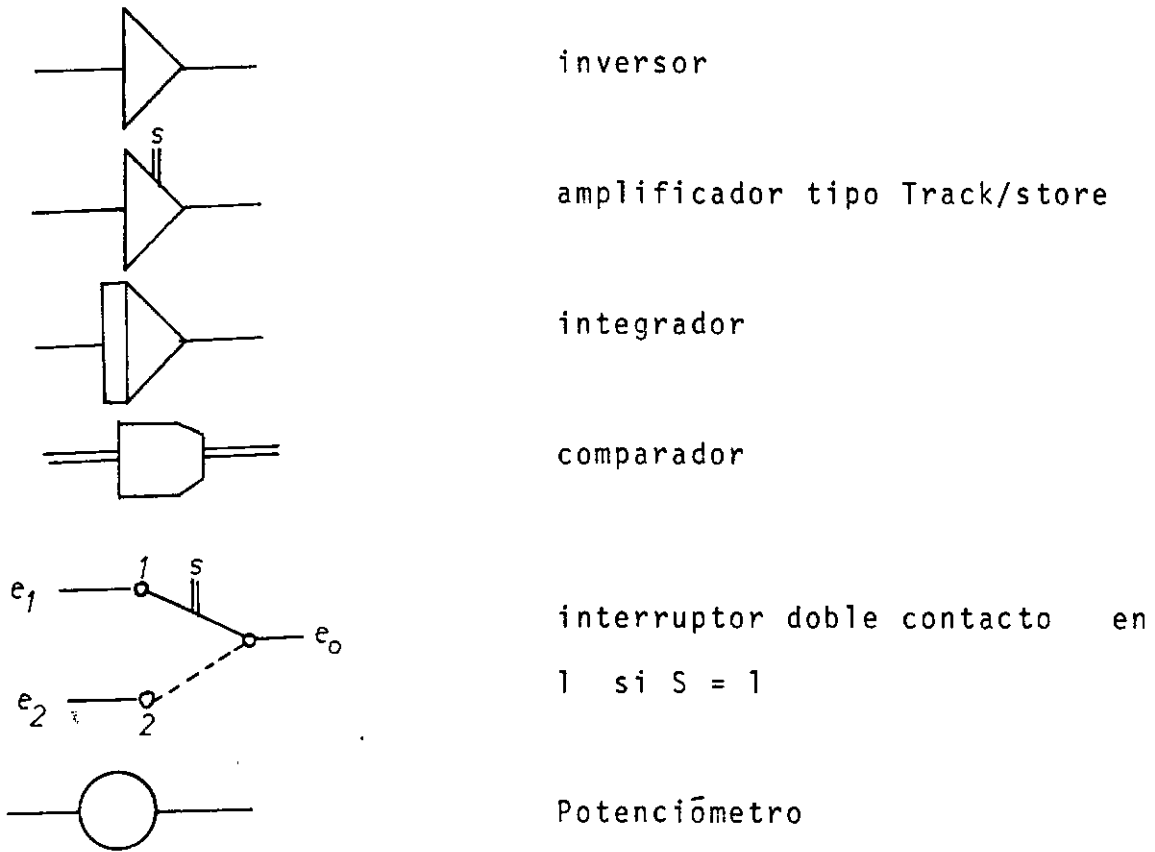


Figura 7.4 - Simbología usada en los diagramas de flujo

Existe mucha literatura sobre computadores analógicos (manuales), donde puede encontrarse cualquier explicación sobre el funcionamiento de cada componente mostrado en la figura 7.4.

Para simplificar el trabajo en el computador analógico, es conveniente construir una tabla para ubicar cada potenciómetro con su respectivo valor.

En la tabla 7.1 se recoge la totalidad de los potenciómetros que integran el circuito general, formado por los 3 subcircuitos.

Tabla 7.1 - Lista de los potenci6metros

| Nº DEL POT | REPRESENTACION      | VALOR EN VOLTS       |
|------------|---------------------|----------------------|
| a          | $\alpha$            | 0.067                |
| b          | $\beta$             | 0.10                 |
| c          | $2\zeta$            | 0.80                 |
| d          | $\beta$             | 0.10                 |
| e          | $2\zeta$            | 0.80                 |
| f          | $\alpha/(1+\gamma)$ | variable             |
| g          | $1/\alpha$          | 0.15                 |
| h          | $\gamma$            | variable             |
| i          | IC en la rueda      | variable             |
| j          | $y_0$               | 1.0                  |
| k          | $\bar{\omega}$      | variable             |
| l          | $\bar{\omega}$      | variable             |
| m          | $\epsilon$          | valor m6nimo (0.001) |

Los valores usados en la tabla 7.1, son valores t6picos para un automovil. Ver tabla 6.1.

#### 7.4 - An6lisis de la Estabilidad del Sistema

En el cap6tulo V, se estudi6 en una forma anal6tica la estabilidad del sistema con el vector controlador  $U = \gamma X_1''$ , se encontraron en esa ocasi6n dos valores  $\gamma$  que hacen el sistema inestable. El sistema se torna inestable te6ricamente en  $\gamma = -1.0$  y  $\gamma = \infty$ .

Se comprob6 en el computador anal6gico, si las conclusiones sobre estabilidad, obtenidas te6ricamente en el cap6tulo V corroboraban experimentalmente. Esto se lo hizo de la siguiente forma:

### Estabilidad en $\gamma = -1.0$

- 1 - Se puso el sistema a oscilar con las siguientes dos condiciones.
  - a) Una condición inicial de desplazamiento en la rueda.
  - b) Una excitación senoidal externa sobre la rueda con frecuencia variable.
- 2 - Se cambió el signo de  $\gamma$ , colocando un inversor en serie con el potenciómetro (h), ver figura 7.1.
- 3 - Se fue aumentando paulatinamente el valor de  $\gamma$  a partir de  $\gamma = 0$ , hasta llegar a un valor de  $\gamma = -1.03$ , donde el sistema se tornó inestable; todos los amplificadores saturan.
- 4 - Se comprobó así experimentalmente, en una forma analógica, que para  $\gamma = -1.0$  el sistema se torna inestable.

### Estabilidad para $\gamma = \infty$

- 1 - Nuevamente se puso el sistema a oscilar bajo las condiciones:
  - a) Condición inicial de desplazamiento sobre la rueda
  - b) Excitación externa sobre la rueda
- 2 - Se hizo nuevamente  $\gamma$  positivo
- 3 - Se fue aumentando  $\gamma$  paulatinamente de 0 hasta  $\infty$ , sucediendo una "cosa extraña", en el valor de  $\gamma = 2.73$ , el sistema se tornó inestable. Aquí la teoría no concuerda con la práctica!, aunque esta cosa extraña se estaba esperando.

### 7.5 - El Porque de la Inestabilidad en $\gamma = 2.73$

En primer lugar cabe recordar que en el capítulo referente a la estabilidad, se encontró que: conforme se va aumentando  $\gamma$  hasta infinito, el grado de estabilidad del sistema va disminuyendo sensiblemente. Cuantativamente puede decirse que el sistema pasa de un grado de estabilidad de 0.022 para  $\gamma = 0$  a un grado de estabilidad de 0.0063 para  $\gamma = 3.0$ . Produciéndose una caída en el grado de estabilidad de 75%.

En segundo lugar al hacerse el estudio analítico, nunca fueron consideradas oscilaciones parásitas ni otros factores que pueden producir inestabilidad. Todos estos factores sí se manifiestan en la práctica [15]. Debido a esto, el sistema se torna inestable en la simulación en el computador analógico, que sí considera todos los factores imprevistos.

Existe un tercer fenómeno por el cual el sistema se puede tornar inestable, para valores de  $\gamma$  que no sean infinitos. Este es el efecto de la fuerza sobre la rueda.

El control inercial usado se basa en una fuerza que trata de parar el cuerpo principal. El apoyo de esta fuerza está en la masa de la rueda, tal como puede apreciarse en el diagrama simplificado mostrado en la figura 7.5.

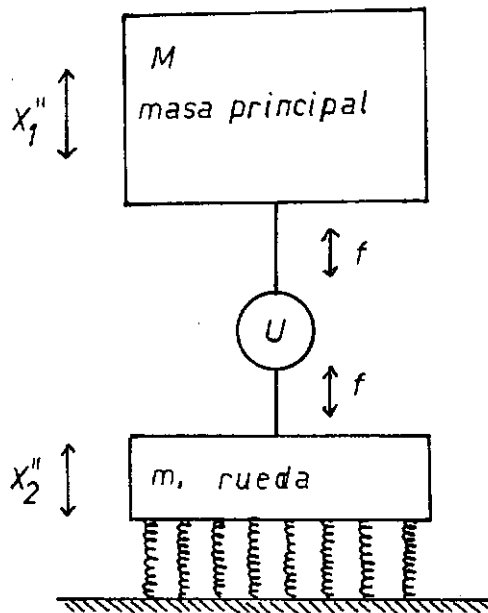


Figura 7.5 - Modelo simplificado del control para justificar la inestabilidad en  $\gamma = 2.73$

En el capítulo anterior, se analizó el efecto de  $\gamma$  sobre la fuerza en la rueda. Se concluyó que para frecuencias de excitación variando entre  $\omega_{n1}$  y  $\omega_{n2}$ , la fuerza sobre la rueda aumenta sensiblemente cuando se aumenta  $\gamma$  para mejorar el sistema.

El efecto de la fuerza sobre la rueda, puede influir en el comportamiento del sistema de las dos siguientes formas.

- a) Supóngase que en la figura 7.5, la masa principal tiene una aceleración  $x_1''$  hacia abajo, sin importar la dirección de la aceleración  $x_2''$ . Bajo esta condición el control ejercerá una fuerza tal que trata de separar las masas, tratando así de detener la masa M (recuérdese que también existen las fuerzas del resorte y del amortiguador). Al actuar el control de esta manera, se

producirá una fuerza hacia abajo actuando sobre la rueda, la cual está apoyada sobre el suelo a través de un resorte.

Si la fuerza actuando sobre la rueda es muy grande ésta podrá ser destruida, esto sucederá eventualmente cuando  $\gamma$  sea infinito.

Esto fenómeno puede traer problemas de inestabilidad.

b) Supóngase que ahora, la masa principal se mueve hacia arriba con una aceleración  $X_1''$ , el control ejercerá una fuerza hacia abajo sobre la masa principal tratando de detenerla, esta fuerza trata de unir las dos masas. Automáticamente aparecerá una fuerza sobre la rueda hacia arriba, que tratará de arrancarla del suelo, pudiendo suceder dos casos de acuerdo con la dirección de la aceleración  $X_2''$ .

1 - Si la aceleración  $X_2''$  está dirigida hacia arriba (en fase con  $X_1''$ ), la masa  $m$  tratará de alejarse del suelo con mucha facilidad.

2 - Si la aceleración  $X_2''$  está dirigida hacia abajo (desfasada  $180^\circ$  con  $X_1''$ ), la masa  $m$  dejará el suelo con menor facilidad, se está aprovechando la fuerza inercial de esta masa.

En cualquiera de los dos casos, si la fuerza sobre la rueda es muy grande, pueden aparecer problemas de inestabilidad.

#### 7.6 - Optimización en el Computador Analógico de la Ley de Control

$$\underline{U = \gamma X_1''}$$

En el capítulo anterior se encontró analíticamente

que el valor de  $\gamma$  que optimiza la ley de control  $U = \gamma X_1''$  es  $\gamma = \infty$ .

Habiéndose encontrado en la simulación del sistema, un valor límite de  $\gamma$  que torna el sistema inestable, debe considerarse este valor límite como el valor que optimiza la ley de control.

Para el caso particular estudiado, el valor límite y óptimo de  $\gamma$  será 2.73, aunque este valor no debe usarse en la práctica por estar en el límite de la estabilidad.

#### 7.7 - Variación de los Valores Máximos de las Variables "Características" Contra la Frecuencia de Excitación

Tal como se hizo en el capítulo anterior, también se obtubieron las curvas de las variables características de la masa principal variando con la frecuencia de excitación. Esto se lo hizo en el computador analógico.

Para construir estas gráficas, los potenciómetros de la frecuencia ( $k$  y  $\ell$  en la figura 7.2) se ajustaron en forma manual.

En las figuras 7.6, 7.7, 7.8 y 7.9 se muestran estos resultados.

Como se observa facilmente, las curvas experimentales mostradas en las figuras 7.6, 7.7, 7.8 y 7.9 son similares a las curvas teóricas correspondientes mostradas en las figuras 6.7, 6.8, 6.9 y 6.10. Esto sirve para corroborar tanto los resultados teóricos como los experimentales.



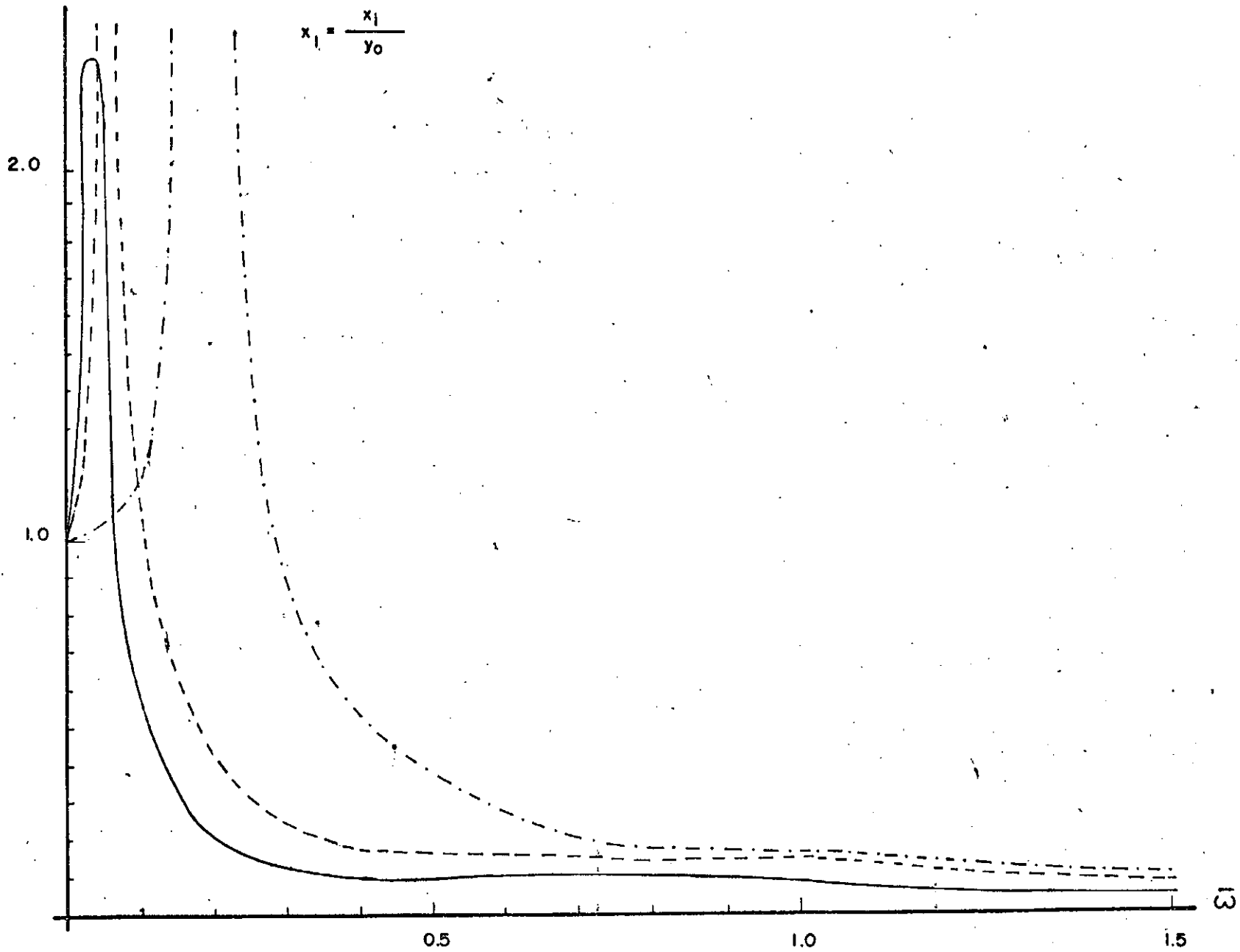


Fig 7.6 Desplazamiento de  $M$  vrs  $\bar{\omega}$  (simulación)

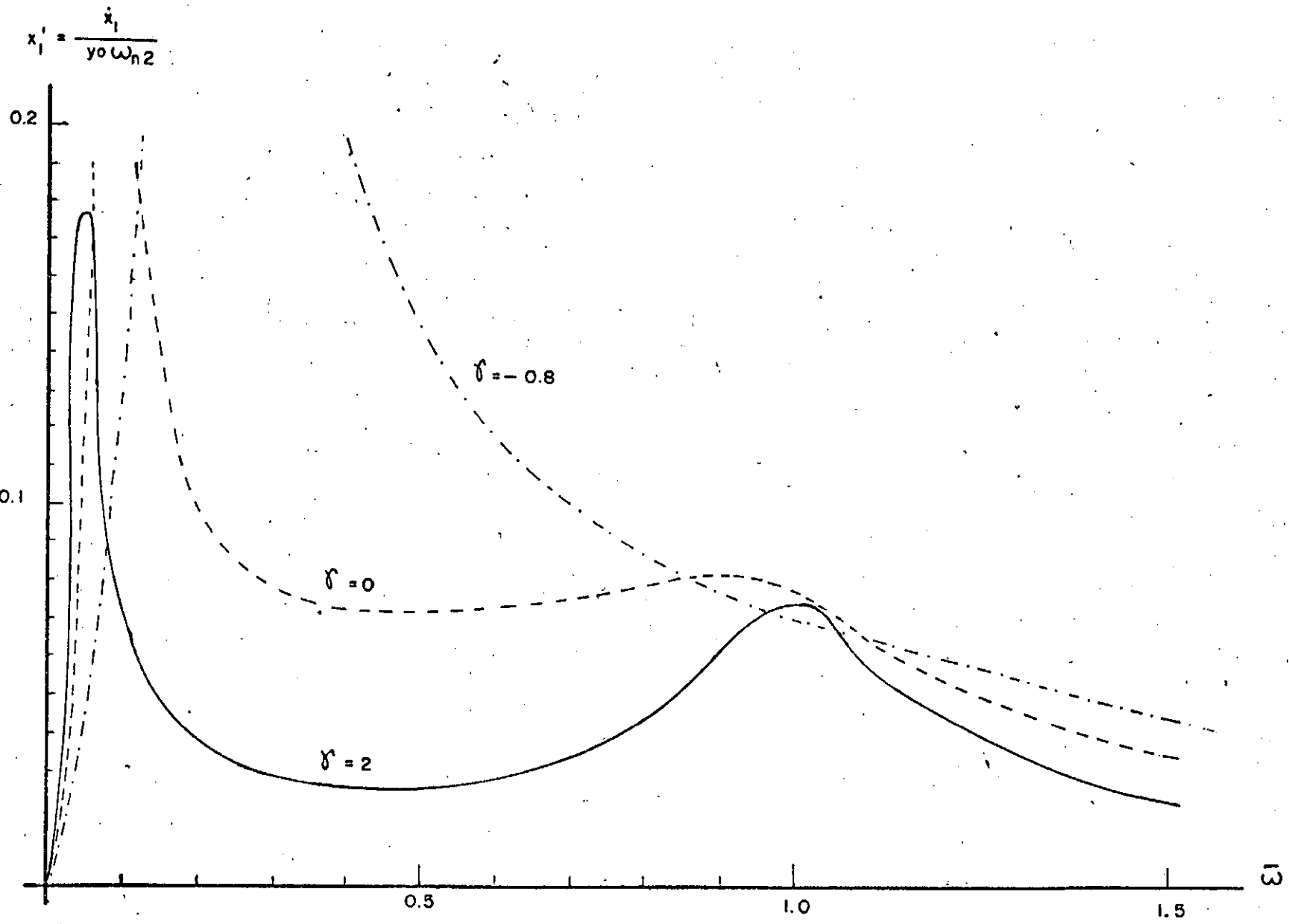


Fig. 7-7 Velocidad de M vrs  $\omega$  (simulación)

$$\ddot{x}_1 = \frac{\ddot{x}_1}{y_0 \omega_{n2}^2}$$

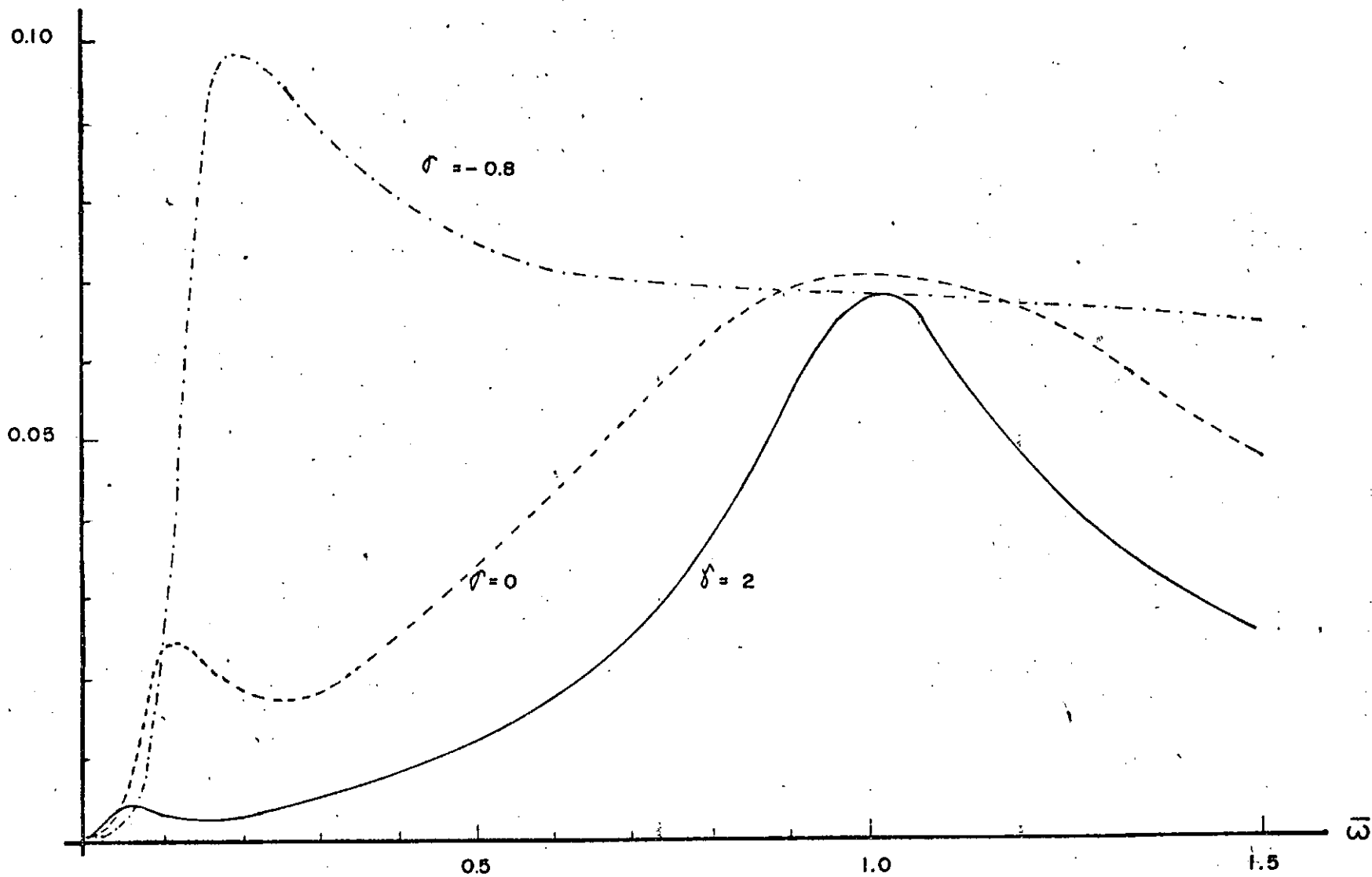


Fig. 7-8 Aceleración de M vs  $\bar{\omega}$  (simulación)

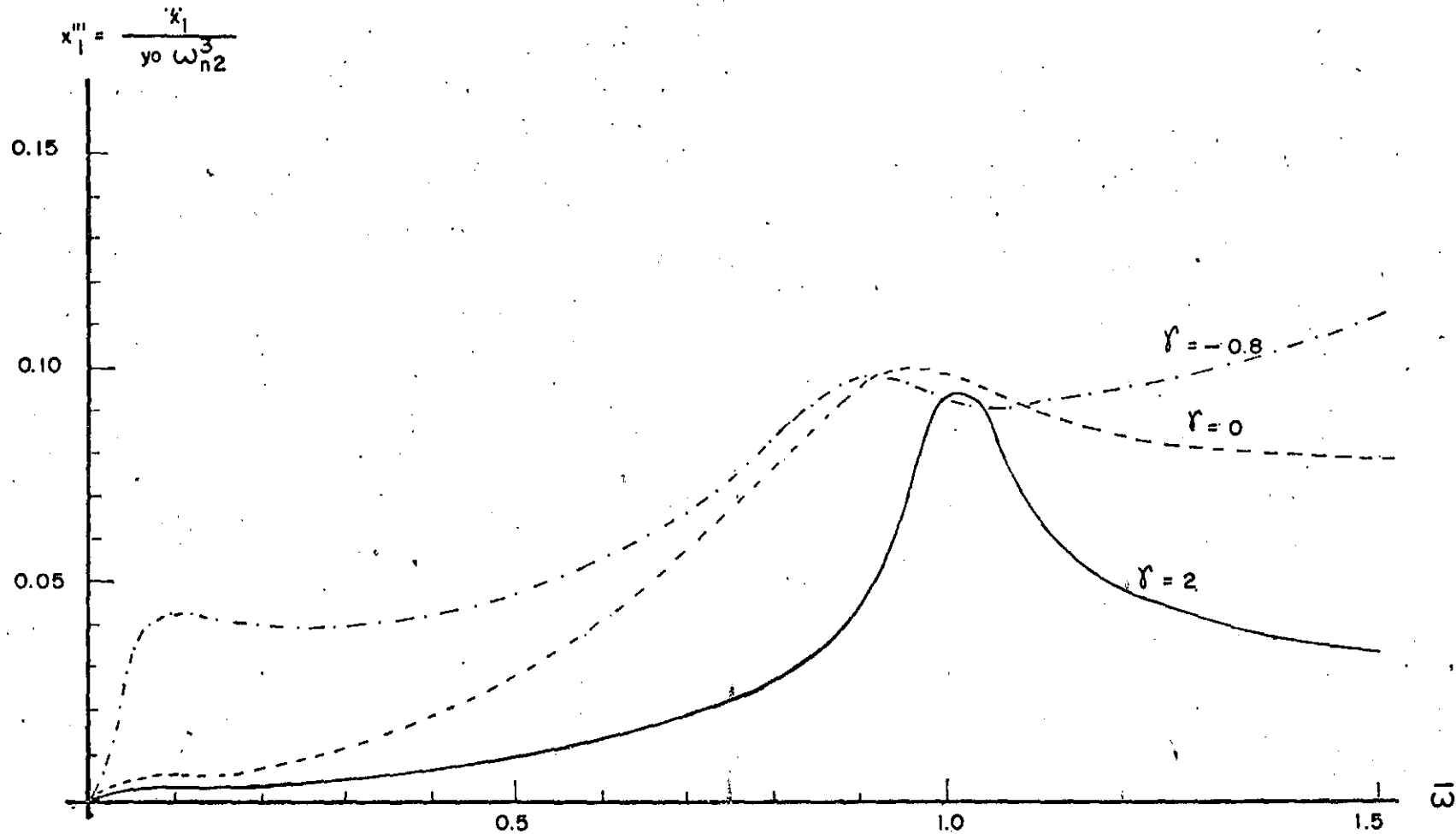


Fig. 7-9 "Jerk" vrs  $\bar{\omega}$  (Simulación)

### 7.8 - Curvas de las Variables Características de la Masa Principal como Función del Tiempo.

A continuación se presentan las curvas características del sistema activo y pasivo variando con el tiempo. Estas curvas fueron obtenidas con un graficador acoplado al computador analógico.

Para obtener estas curvas el sistema se puso a vibrar de dos diferentes maneras.

- a) Sistema no excitado, puesto a vibrar con una condición inicial de desplazamiento en la rueda. Que equivale a un resalto o un bache en el camino.
- b) Sistema excitado con una perturbación externa senoidal.

### Curvas Características Variando con el Tiempo para una excitación Senoidal

En la figura 7.10, se tiene la aceleración segunda variando con el tiempo, para el sistema pasivo y para el sistema controlado, cuando  $\bar{\omega} = 0.1$ .

Puede notarse claramente en esta figura el efecto del control sobre el sistema. Para  $\gamma = 2.5$  el sistema mejora sobre el caso pasivo  $\gamma = 0$ . Por otro lado cuando  $\gamma$  es negativo, el sistema empeora.

La fase del "Jerk" no cambia para diferentes valores en el control.

En la figura 7.11 se tiene el plano de fase para el sistema excitado, con una frecuencia  $\bar{\omega} = 0.1$ .

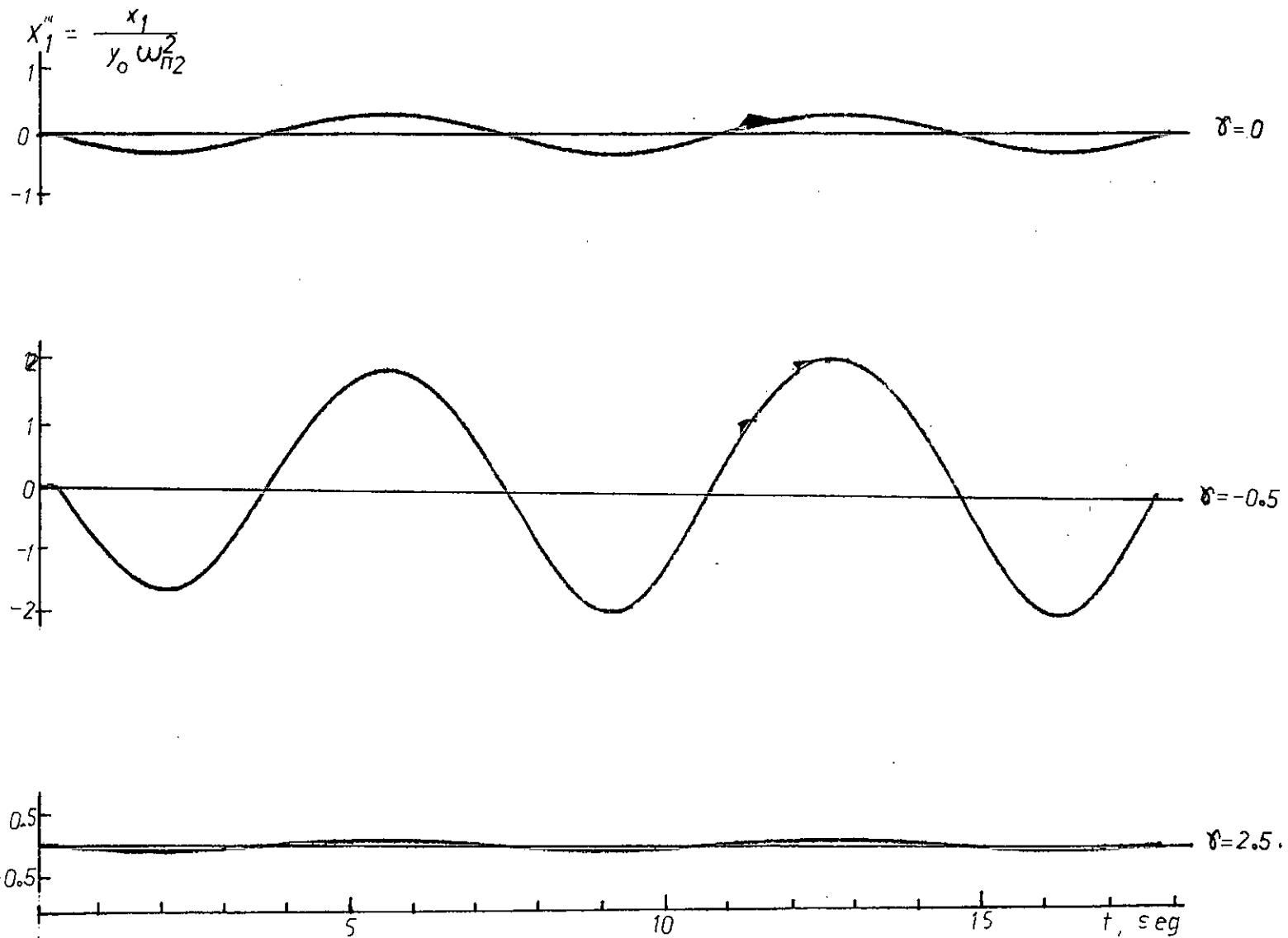


Figura 7.10. Aceleración segunda vrs tiempo,  $\bar{\omega} = 0.1$

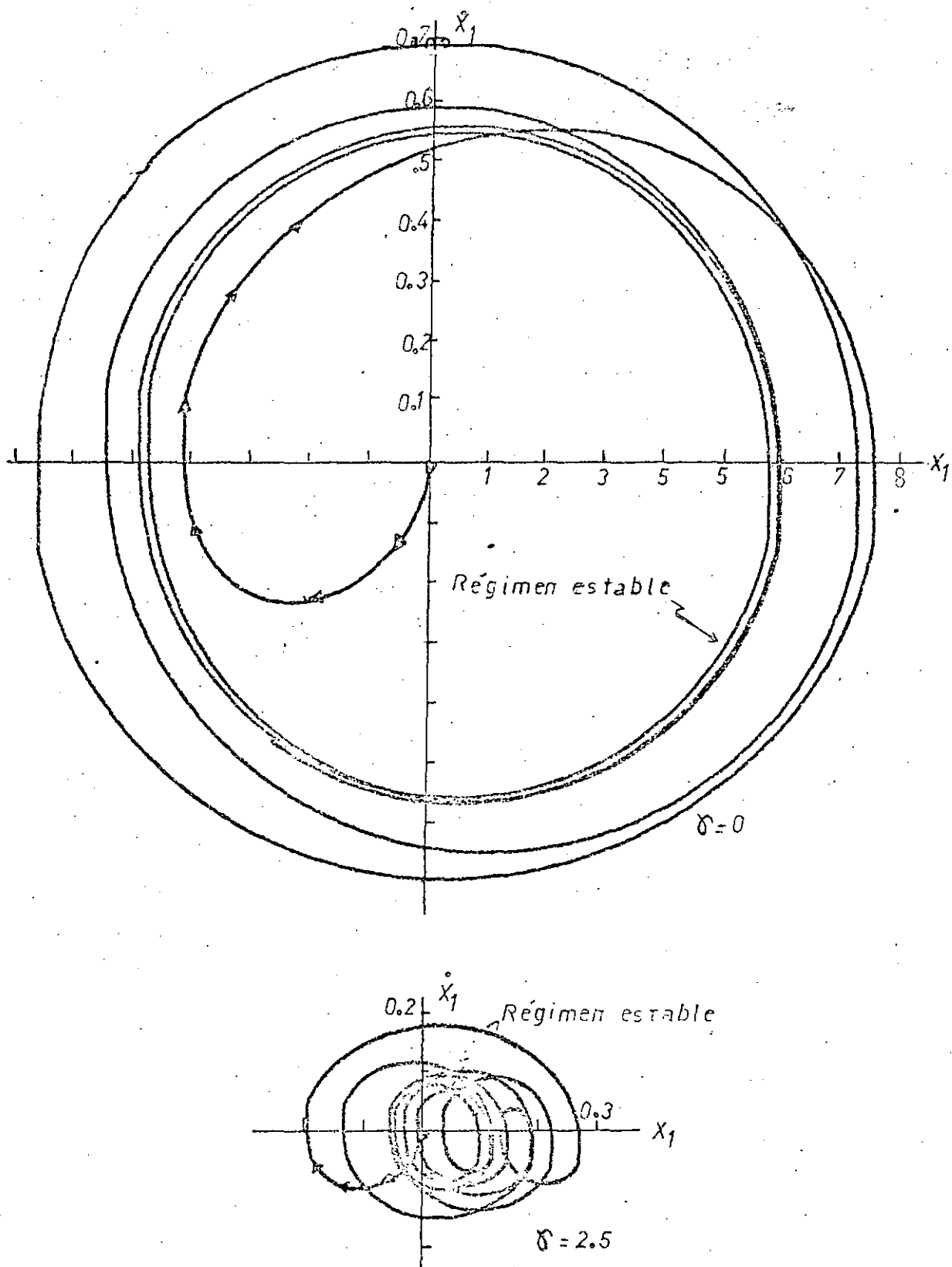


Figura 7.11. Plano de fase;  $\bar{\omega} = 0.1$

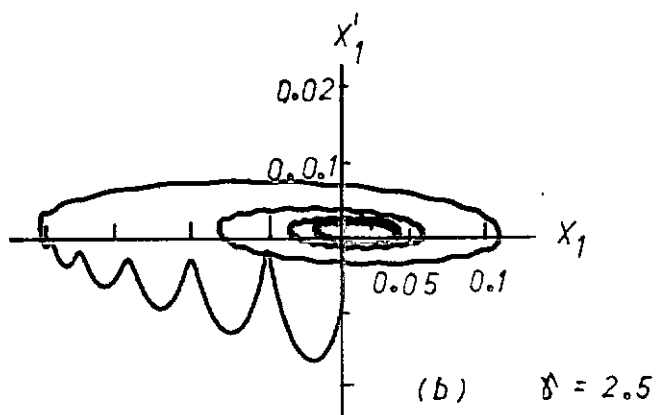
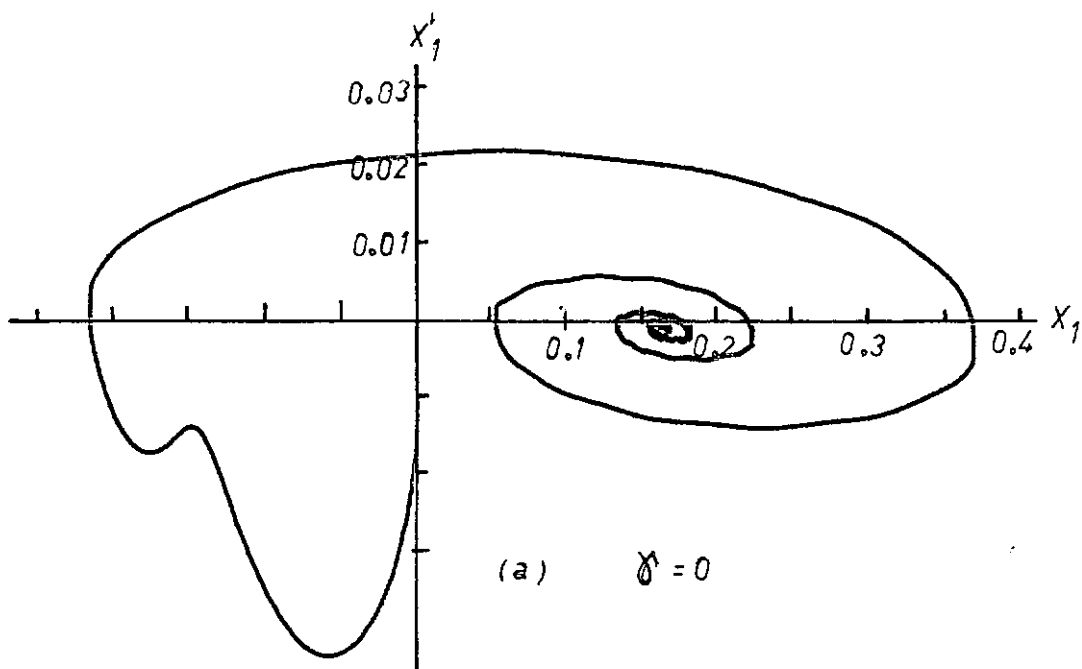


Figura 7.12. Plano de fase;  $\bar{\omega} = 1$



Se puede notar una gran mejoría introducida por el control en el régimen estable. El control también mejora el estado transitorio.

En la figura 7.12 se tiene el plano de fase del sistema excitado cuando  $\bar{\omega} = 1$ . En esta figura se puede apreciar lo siguiente. El control no tiene ninguna influencia sobre los valores absolutos de velocidad y desplazamiento de la masa principal en el estado estable. El control desplaza la posición de equilibrio del sistema.

El control mejora el estado transitorio en cuanto a las magnitudes, pero lo hace un poco más brusco.

#### Efecto del Control sobre el Sistema no Excitado

En la figura 7.13 se muestra el efecto del control sobre el comportamiento de la "comodidad" en sistema. Es decir se tiene la variación de la aceleración segunda con el tiempo para el sistema controlado y el sistema pasivo. En esta figura se puede observar lo siguiente. El control disminuye la amplitud máxima de la aceleración segunda, aumentando así el grado de comodidad. La masa principal tarda mayor tiempo para volver a la posición de equilibrio en el sistema controlado que en el sistema pasivo, pero lo hace en una forma suave y comfortable.

Todas las demás características, desplazamiento, velocidad y aceleración de la masa principal son alteradas por el control en una forma similar a la aceleración segunda mostrada en la figura 7.13.

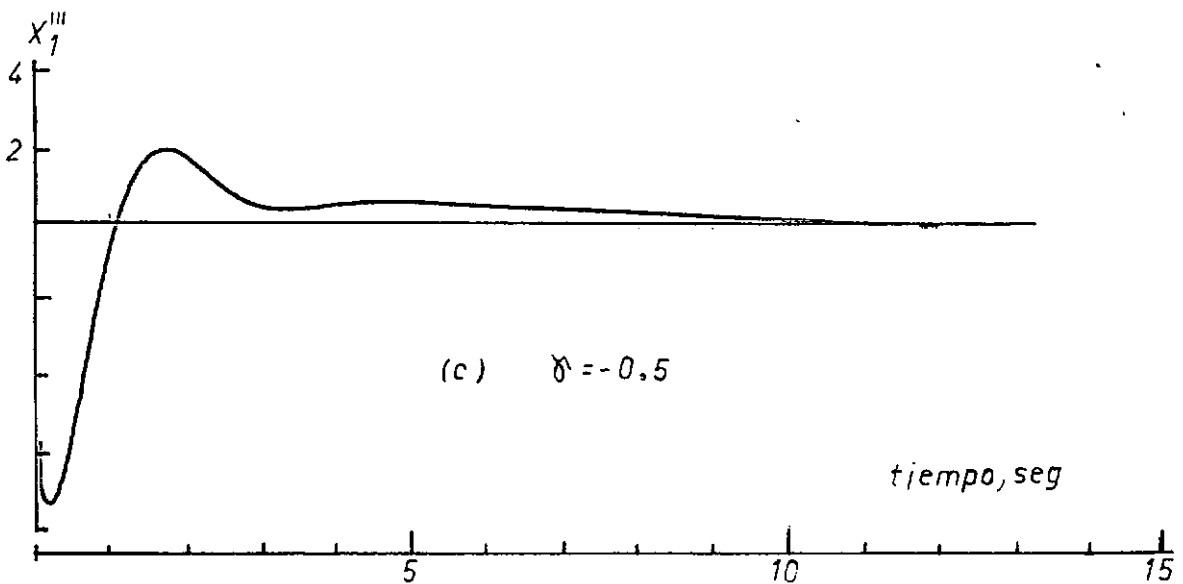
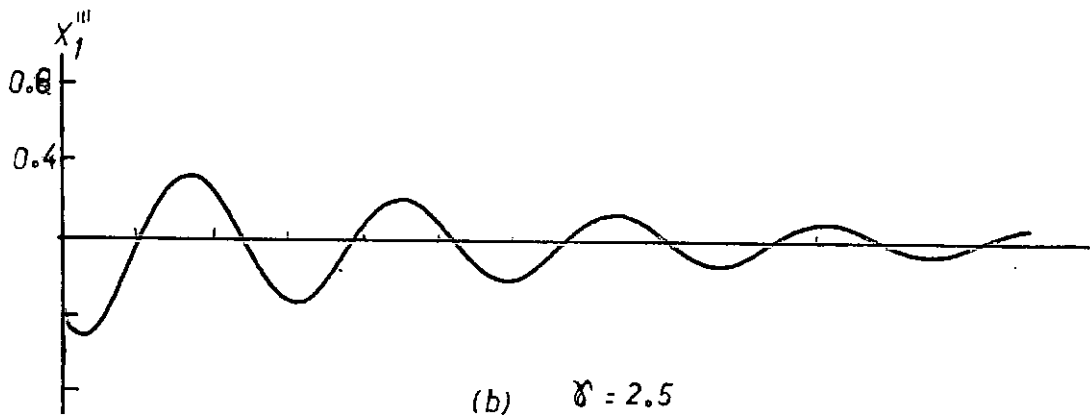
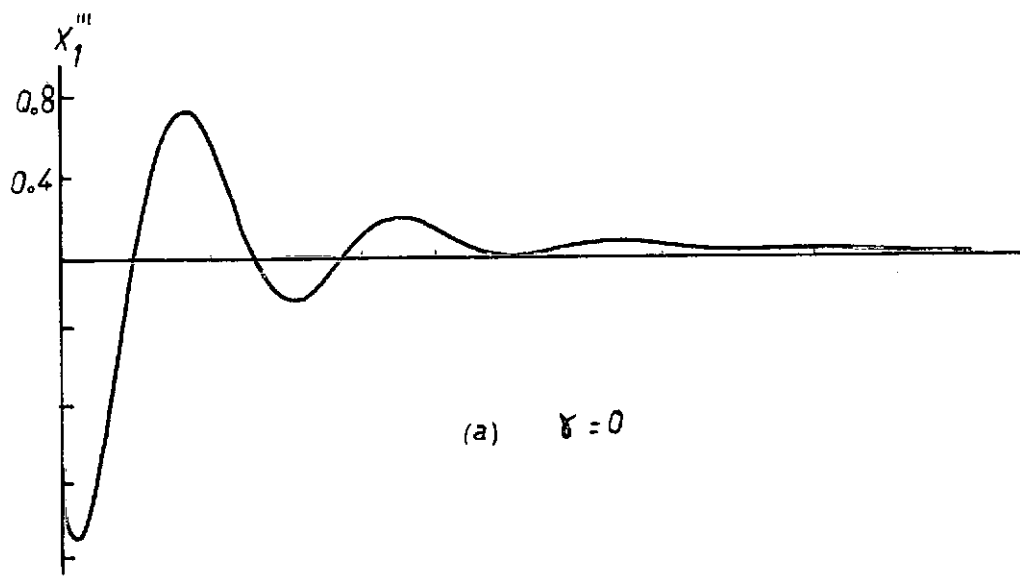


Figura 7.13.  $X_1'''$  vrs tiempo, con una condición inicial de desplazamiento en la rueda

### 7.9 - Sistema Sometido a una Excitación Externa, y a una Condición Inicial

Hasta el presente momento se ha estudiado independientemente, el sistema excitado externamente en una forma senoidal, y el sistema sometido a una condición inicial de desplazamiento en la rueda.

Em ambos casos se ha concluido que el comportamiento del sistema mejora con la aplicación del control.

Será que el sistema combinado mejora?

Supongase al automovil corriendo por una carretera que produce una excitación externa sinoidal, y de pronto cae en un bache. Cuál sería el comportamiento del sistema bajo estas condiciones?

De hecho mejora, en la simulación del sistema en el computador analógico bajo estas condiciones, se apreció en una forma cualitativa esta mejoría ya esperada.

### 7.10 - Conclusión

El trabajo en el computador analógico fue muy interesante y provechoso. Aunque los resultados cuantitativos pueden obtenerse con mayor precisión en una forma analítica; se obtuvieron resultados cualitativos muy importantes, que sirvieron para el estudio analítico, y a la vez corroboraron los resultados obtenidos analíticamente.

Los resultados más importantes obtenidos con la simulación del sistema son:

- 1 - Escogencia de la ley de control  $U = \gamma X_1''$ .
- 2 - Inestabilidad del sistema en  $\gamma = 2.73$ , que a la vez se conside  
ra el valor límite en la optimización de la ley de control.

## VIII - CONCLUSIONES, DISCUSION, RECOMENDACIONES

### 8.1 - Conclusiones

La mayoría de las conclusiones obtenidas en el presente trabajo se han venido incluyendo al final de cada capítulo.

Para dar una idea del resultado global de este trabajo, se enumeran a continuación las principales conclusiones obtenidas.

1 - El sistema controlado es mejor que el sistema pasivo

2 - La ley de control  $U = a\ddot{x}_1$ , es una buena ley que se puede usar para mejorar el sistema pasivo.

Las ventajas principales de esta ley de control son:

- a) Es vector o ley de control más simple, que produce el mayor grado de mejoría en el sistema, en cuanto se refiere al comportamiento de la masa principal.
- b) La aceleración de la masa principal, es la variable característica del sistema, que se puede medir más fácilmente, en una forma absoluta bajo cualquier condición con el uso de un acelerómetro.

Entre las mayores desventajas de esta ley de control se encuentran:

- a) Para frecuencias de la perturbación al sistema correspondientes a la frecuencia natural de la rueda, el control no tiene ningún efecto en la mejoría del sistema.
- b) Las mejorías producidas por esta ley de control implican un aumento en la fuerza sobre la rueda, la cual podría eventualmente ser destruída o arrancada del suelo.

c) Este tipo de ley de control mayormente conveniente para vehículos Livianos [15].

- 3 - La ley de control  $U = a\ddot{x}_1$ , actúa de hecho aumentando en una forma aparente, la masa del cuerpo principal. Disminuyendo de esta forma la frecuencia natural de esta masa y de su razón de amortiguamiento, lo que produce el grado de mejoría en el sistema.
- 4 - La mejoría en el comportamiento de la masa principal del sistema, se consigue a costas de un aumento en la fuerza sobre la rueda.
- 5 - El aumentar la masa principal en una forma aparente, tal como se lo ha hecho, no altera la inercia global del sistema. Por lo tanto si el sistema se mueve como un todo, no es necesaria energía adicional para acelerar o frenar el conjunto (automóvil, avión, barco).
- 6 - Las condiciones de giro sobre un eje longitudinal (rolling), y sobre un eje lateral (pitching) de la masa principal en el sistema activo, no ha sido empeoradas respecto al sistema pasivo; pues no se ha cambiado el momento de inercia de la masa principal. Estas condiciones de giro pueden ser eventualmente mejoradas si se estudia un sistema más complejo.
- 7 - Conforme se aumenta en una forma aparente la masa principal del sistema, el grado de estabilidad del mismo disminuye, llegando a valer cero para un valor de masa aparente igual a infinito.

- 8 - Definitivamente existe un valor de  $\gamma$  menor que infinito en el cual el sistema se torna muy sensible a perturbaciones. En el caso particular analizado, en el computador analógico este valor fue de  $\gamma = 2.73$ . Este es el valor límite, el cual se considera como el valor que optimiza la ley de control  $U = \gamma \ddot{x}_1$ .
- 9 - El valor límite de  $\gamma$  no es un valor que en la práctica se puede considerar como el mejor, pues existe el peligro de que el sistema se torne fácilmente inestable.
- 10- La idea de aumentar en una forma aparente la masa principal en el sistema de suspensión de un automovil, puede extenderse a cualquier cuerpo masivo que se deseé estabilizar de perturbaciones externas.
- 11- Después de cierto aumento aparente en la masa principal, 4 a 5 veces la masa real; el grado de mejoría que se consigue en el comportamiento del sistema, es pequeño.
- 12- Para el caso particular de la suspensión de automovil analizada, se obtubieron los siguientes resultados.
  - a) Para una frecuencia de excitación igual a la frecuencia natural de la rueda. El control no produce ningún efecto en el comportamiento de la masa principal.
  - b) Para frecuencias mayores que la frecuencia natural de la masa principal, excepto aquella que corresponde a la frecuencia natural de la rueda, el comportamiento de la masa principal mejora sensiblemente con la introducción del control.
  - c) El porcentaje de mejoría en el confort, usando el "jerk" como índice de comodidad, es de 65% cuando  $\gamma = 2$ , es decir se ha aumentado la masa principal  $M$  en una forma aparente, de

M a  $3M$ , cuando la frecuencia de excitación corresponde a  $1.5 \omega_{n2}$ . Produciéndose en este caso una reducción en el grado de estabilidad del sistema de 60%.

- e) El valor  $\gamma = 2.0$  se ha escogido como valor adecuado para ser usado en la ley de control. Es decir, que el cuerpo principal, con una masa real  $M$  pasa a tener una masa aparente de  $3M$ .
- f) El porcentaje en la disminución de la frecuencia natural del cuerpo principal  $\omega_{n1}$  y su razón de amortiguamiento, al pasar del sistema pasivo al activo con  $\gamma = 2.0$  es de 43%.
- g) El dispositivo que varíe la masa principal en una forma aparente, será un servomecanismo, que debe acoplarse entre la rueda y el chasis de la masa suspensa (principal), para cada una de las ruedas.

## 8.2 - Discusión

Como tema de discusión cabe la pregunta: Que sucede cuando la masa principal  $M$ , es variable? Este es el caso netamente real, supongase el avión cargado de combustible, o el barco. El mismo automovil, donde se ha considerado como masa ( $M$ ), solamente el cuerpo del automovil, sin incluir los pasajeros.

Esto lleva a pensar en un valor de  $\gamma$  en función de la masa.

Evidentemente, en todos estos casos, particularmente en el automovil; si se quiere simplificar la ley de control manteniendo  $\gamma$  constante; se debe encontrar  $\gamma_{op}$  basándose en el máximo valor que pueda alcanzar la masa principal. Esto implica un sacrificio en el grado de mejoría, pero asegura que no se tendrán problemas con la estabilidad del sistema, que será lo que ocurriría si se



usase el valor mínimo de la masa del cuerpo principal.

Supóngase que se encuentra  $\gamma_{op}$  en base al vehículo vacío (masa mínima  $M$ ).

En este caso la frecuencia natural de la masa principal será

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{k_1}{(1 + \gamma) M}}$$

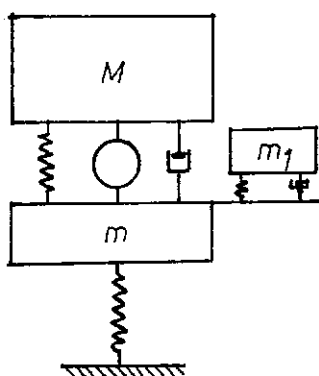
Ahora si la masa principal sufre un incremento ( $AM$ ) con la subida de pasajeros, su frecuencia natural será

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{k_1}{(1 + \gamma)(M + AM)}}$$

La cual obviamente es menor que en el caso del vehículo sin pasajeros. Esta disminución de la frecuencia natural produce una mejoría en el sistema, que a la vez implica una disminución en el grado de estabilidad del mismo, el cual ya se había reducido al valor límite introduciendo el control.

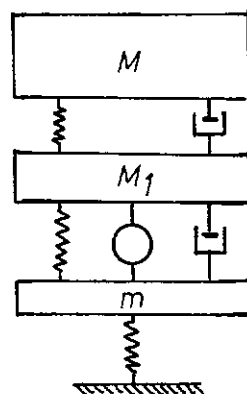
Otro punto de objeción sería el problema de la ineficacia de la ley de control  $U = \gamma X_1''$  en la suspensión del automóvil cuando  $\bar{\omega} = 1$ .

Para obtener mejorías reales es necesario alterar ese fenómeno. Esto solo es posible alterando la estructura del sistema. Se puede pensar en introducir un amortiguador dinámico, pasivo o activo, o también en aislar la masa suspensa, o cabina de pasajeros, ver figura 8.1.



(a)

Amortiguador dinámico en la rueda ( $m_1$ )



(b)

Cabina Suspensa ( $M$ )

Figura 8.1 - Modelos más complejos para anular la ineficacia del control en  $\bar{\omega} = 1$ .

Antes de decidir por alguna solución es necesario realizar un estudio en ese sentido, que queda como propuesta para un futuro trabajo.

Y el amortiguamiento?

Cuando se estudió, o mejor dicho se escogió la ley de control, ésta se propuso inicialmente como

$$U = a\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + b_2\dot{x}_2$$

Que luego por razones de difícil medición de  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2$  se redujo a  $U = a\ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)$ , siendo  $b(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)$  la representación matemática de un amortiguador (elemento pasivo).

También se sabe que disminuyendo  $b_1$ , y aumentando  $b_2$  se consiguen mejoras en el sistema [17].

Ahora bien, el problema se presenta cuando se quiere escoger el valor de la constante de amortiguamiento,  $(b)$ . Se ha tomado la constante  $(b)$  como la misma que se tiene para un sistema pasivo de suspensión, esta constante se a optimizado por los medios tradicionales.

Será que con un valor de amortiguamiento en el sistema activo, diferente que en el pasivo, puede mejorar aún más el comportamiento del sistema? Aparentemente no, esto se observó cualitativamente en el computador analógico, se varió  $(b)$  dentro de los límites razonables, y no se notó ninguna influencia en el comportamiento del sistema activo.

Cabe ahora discutir el costo:

Será que vale la pena convertir un sistema pasivo en uno activo controlado?

En algunos casos es completamente indispensable, por ejemplo en la industria aero-espacial y en vehículos militares.

Existe un modelo experimental de suspensión controlada de la Westinghouse, el cual está en etapa de prueba para vehículos militares [15].

En otros casos no valdrá la pena alterar el sistema pasivo.

En el caso particular del automóvil. Haría usted estimado lector una inversión de \$ 500 para sentirse un poco más cómodo cuando conduce a la ciudad?

Esta pregunta no tiene respuesta inmediata, quizá no sean \$ 500, sino solo \$ 50.

### 8.3 - Recomendaciones

Una etapa del estudio para mejorar el sistema de suspensión de un vehículo se considera aquí concluída.

Sigue inmediatamente una etapa netamente práctica, la cual puede consistir de dos partes:

a) Estudio en el laboratorio de un modelo de suspensión, el cual puede construirse facilmente. El conjunto general se ilustra en la figura 8.2.

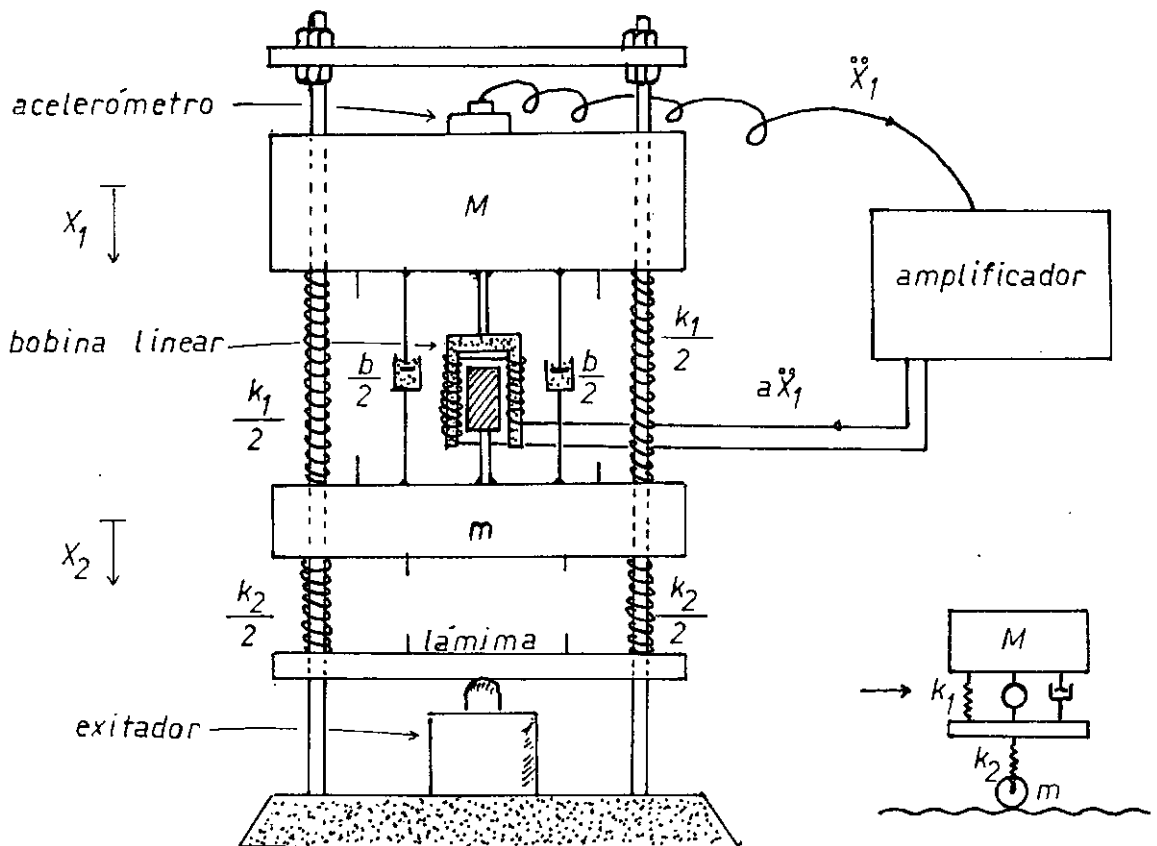


Figura 8.2 - Modelo para estudiar la suspensión de un automóvil.

Con el modelo mostrado en la figura 8.2, se puede estudiar en una forma más real el problema; se puede saber bajo que condiciones la rueda deja el suelo, equivale a observar cuando la lámina pierde contacto con el excitador. Pueden también sacarse experimentalmente muchos otros resultados imprevistos en el estudio semi-teórico, presentado en este trabajo.

b) Estudio de un prototipo de suspensión en un automovil verdadero. Para esto será necesario encontrar el mejor dispositivo que produzca la fuerza de control, con una razonable constante de tiempo para la respuesta, y con todas las condiciones que este dispositivo deba llenar.

La mayoría del trabajo por realizar será de carácter empírico.

Se recomienda la continuación del trabajo en esta dirección, quizá así aparezca algún día algo positivo para el mejoramiento de una suspensión de automovil, tal que la mejoría obtenida justifique la inversión hecha.

Como adelanto al árduo trabajo que sigue de aquí en adelante, se presentan a continuación algunas ideas que pueden servir para aumentar aparentemente la masa del cuerpo principal de un automovil.

1 - Cilindro hidráulico

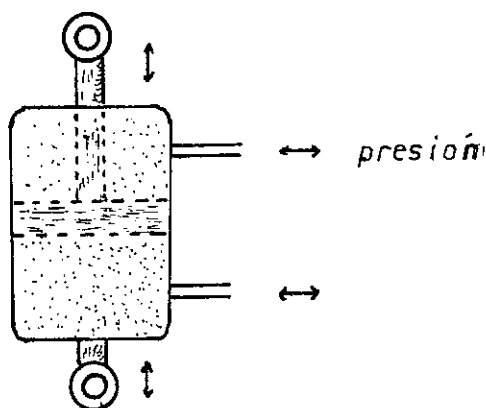


Figura 8.3 - Cilindro hidráulico

2 - Fuelle de caucho, o otro material elástico

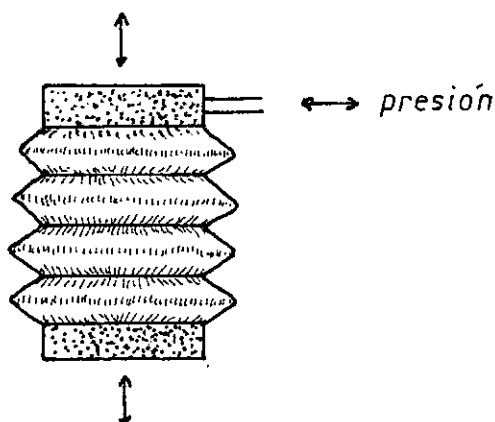


Figura 8.4 - Fuelle elástico

3 - Alerones

Este método no necesitará de un dispositivo que se instale en medio del cuerpo principal y la rueda.

El principio se basa en el empuje (lift) que sufre un cuerpo aerodinámico que se desplaza en un fluido, aire por ejemplo.

Esta idea se ilustra mejor con la ayuda de un esque

ma, tal como el mostrado en la figura 8.5.

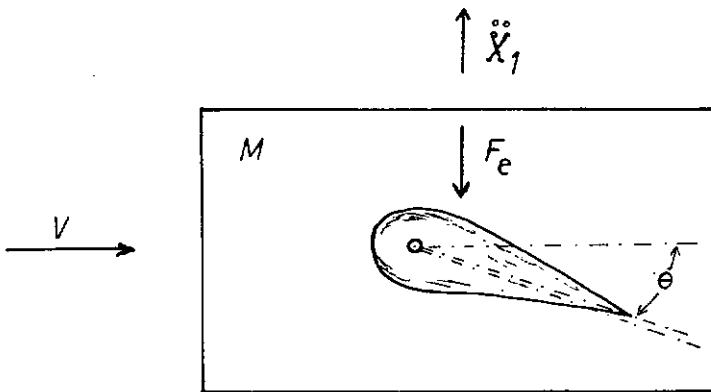


Figura 8.5 - Masa controlada con alerones

En la figura 8.5, cuando la masa  $M$  tiene una aceleración  $\ddot{x}_1$ , el alacrón estará en una posición tal que produce una fuerza de empuje sobre la masa ( $F_e$ ), que impide que ésta sea acelerada. Esta fuerza entre otras cosas es función de la velocidad ( $v$ ) de la masa y el ángulo de ataque ( $\theta$ ).

Para una velocidad constante, la fuerza  $F_e$  será solo función de  $\theta$ , que es entonces el ángulo que se varía para compensar la fuerza de inercia de la masa  $M$ .

Este método podrá servir tanto para un automóvil, un avión o un barco.

Sobra recalcar que el dispositivo (servomecanismo) usado para aumentar masa en forma aparente, debe ser lo más simple posible, incluyendo en su conjunto el medidor de aceleración.

REFERENCIAS

- 1 - ATHANS AND FALB - Optimal Control - Mc Graw Hill, 1966
- 2 - DEN HARTOG - Vibrações nos Sistemas Mecânicos - Editora Edgar Blücher, São Paulo, 1972
- 3 - DYER MAC REYNOLDS - The Computation and Theory of Optimal Control - Academic Press, New York, 1970.
- 4 - G.N. SARMA, F. KOZIN - An active Suspension System Design For the Lateral Dynamics of a High-Speed Wheel-Rail System - ASME 71 - WA/AUT 8.
- 5 - KUO BENJAMIN C. - Automatic Control Systems - Pentice Hall Inc. 1965.
- 6 - LEITMAN - An Introduction to Optimal Control - Mc Graw Hill , 1962.
- 7 - MAC DUFF & CURRERI - Vibration Control - Mc Graw Hill, 1958
- 8 - MANSOUR W.M. - Absolute Maxima of Dynamic Responses in Analog Simulation, a ser publicado.
- 9 - OGATA KATSUHIKO - State Space Analysis of Control Systems - Prentice Hall, 1967.
- 10- PORTER B., BRADSCHAN A. - Synthesis of Active Controlrs for Vibratory Systems - Journal of Mechanical Engineering Science - Vol 14 Nº 5, 1972.
- 11- R.K. HODKIN - Automobile Suspension Springing.



- 12 - SEALE D.C. - Mecanical Engineering Aplications of the Analog Computer - Symposium at Paisley College of Technology. , Pgs 33-46, 1966.
- 13 - SETO WILLIAN, W - Vibrações Mecânicas - Colección Schaum, Mc Graw Hill do Brasil, 1971.
- 14 - SHIGLEY J.E.- Theory of Machines - Mc Graw Hill, 1961.
- 15 - PUTMAN T.H. - An Active Stabilization System for Vehicles and Other Masive Bodies - Shock & Vibration Bul. 38, pgs. 317-24, 1968.
- 16 - W.R. PERKINS, T.B. CRUZ - Engineering of Dynamic Systems, Wiley International, 1965.
- 17 - WEBER H.I. - Improving of a Mechanical System by Active Control, ZAMM, a ser publicado.
- 18 - WIBERG, D.M. - State Space and Linear Systems - Colección Schaum - Mc Graw Hill, 1971
- 19 - Y.T. LI, J.L. MEIRY - An Active Roll Mode Suspensiön System for Ground Vehicles, Joint AUTomatic Control Conference, pgs 390-8, 1966.
- 20 - LUCKEL, MULLER, SCHIEHLEN - Lineare Schwingungen, Akademische Verlagsgesell-Schaft, 1973.
- 21 - MITSCHKE, M - Dynamik Der Kraftfahrzeuge Springer, 1972.
- 22 - CHETAYEB N.G., - The Stability of Motion - Pergamon Press, 1961.

23 - KOU & TABAK - Optimal Control by Mathematical Programing - Pre  
tice Hall Inc., 1970.

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(2501READER,1403PRINTER)
      DIMENSION POL(5),POLA(5),RREAL(4),RIMAG(4)
      N=4
      ALFA=0.0666
      BETA=0.10
      CSI=0.40
2      READ(8,100)GAMA
100     FORMAT(F20.1)
      IF (1.+GAMA)3,4,3
4      CALL EXIT
3      POL(1)=BETA*ALFA/(1.+GAMA)
      POL(2)=(2.*CSI*ALFA)/(1.+GAMA)
      POL(3)=(GAMA+BETA*(1.+ALFA)+1.)/(1.+GAMA)
      POL(4)=(2.*CSI*(1.+ALFA))/(1.+GAMA)
      POL(5)=1.
      CALL POLRT(POL,POLA,N,RREAL,RIMAG,KR)
      IF(KR)41,40,41
41      WRITE(5,200)
200     FORMAT(//,'NO HUBO ITERACION')
      GO TO 2
40      WRITE(5,300)
300     FORMAT(//,' RAICES REAL/IMAGINARIA DE LA ECUACION)
      WRITE(5,310)RREAL
      WRITE(5,310)RIMAG
310     FORMAT(4E14.5)
      GO TO 2
      END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
IOCS

|                       |   |           |                |
|-----------------------|---|-----------|----------------|
| CORE REQUIREMENTS FOR |   |           |                |
| COMMON                | 0 | VARIABLES | 56 PROGRAM 238 |

END OF COMPILATION

```

C ESTE PROGRAMA RESUELVE LA VARIABLE MAXIMA (X) MAX
C DE UN SISTEMA DE SUSPENSION DE AUTOMOVIL
DIMENSION GAMA(50),OMEGA(50)
LR=8
LW=5
READ(LR,20) NC,(GAMA(I),I=1,NC)
READ(LR,20) NW,(OMEGA(I),I=1,NW)
20 FORMAT(I10,7F10.3,/(8F10.3))
WRITE(LW,10)
10 FORMAT(/10X,'VALORES DEL CONTROL')
WRITE(LW,30)(GAMA(I),I=1,NC)
30 FORMAT(/10X,8F10.4)
WRITE(LW,40)
40 FORMAT(/10X,'VALORES DE LA FRECUENCIA DE EXITACION')
WRITE(LW,30)(OMEGA(I),I=1,NW)
C AMPLITUD DE LA FUERZA DE EXITACION
FO=1.0
C VALORES TIPICOS DEL AMORTIGUAMIENTO , RAZON DE
C MASAS Y RAZON DE CONSTANTES DE RESORTE
BETA=0.10
PSI=0.40
ALFA=0.067
DO 1 J=1,NW
WRITE(LW,60)OMEGA(J)
60 FORMAT(/10X,'VALOR DE LA FRECUENCIA',F10.4)
WRITE(LW,70)
70 FORMAT(/10X,'CONTROL      AMPL      VEL      ACEL',4X,
1'JERK      AMPL2      FUER2')
DO 1 I=1,NC
A=BETA**2+4.*PSI**2*OMEGA(J)**2
B=(1.+GAMA(I))*OMEGA(J)**4
C=(-1.-BETA-GAMA(I)-BETA*ALFA)*OMEGA(J)**2+BETA*ALFA
D=(-2.*PSI-2.*PSI*ALFA)*OMEGA(J)**3+2.*PSI*ALFA*OMEGA(J)
AMPL=FO*ALFA*SQRT(A/((B+C)**2+D**2))
E=(-OMEGA(J)**2-GAMA(I)*OMEGA(J)**2+BETA*ALFA)**2
F=(2.*PSI*OMEGA(J)*ALFA)**2
AMPL2=FO*SQRT((E+F)/((B+C)**2+D**2))
ACEL2=AMPL2*OMEGA(J)**2
VEL=AMPL*OMEGA(J)
ACEL=VEL*OMEGA(J)
CJERK=ACEL*OMEGA(J)
ACEL2=AMPL2*OMEGA(J)**2
FUER2=600.0*ACEL+40.0*ACEL2
WRITE(LW,50)GAMA(I),AMPL,VEL,ACEL,CJERK,AMPL2,FUER2
50 FORMAT(/F17.4,F9.4,F8.4,4F9.4)
1 CONTINUE
CALL EXIT
END

```

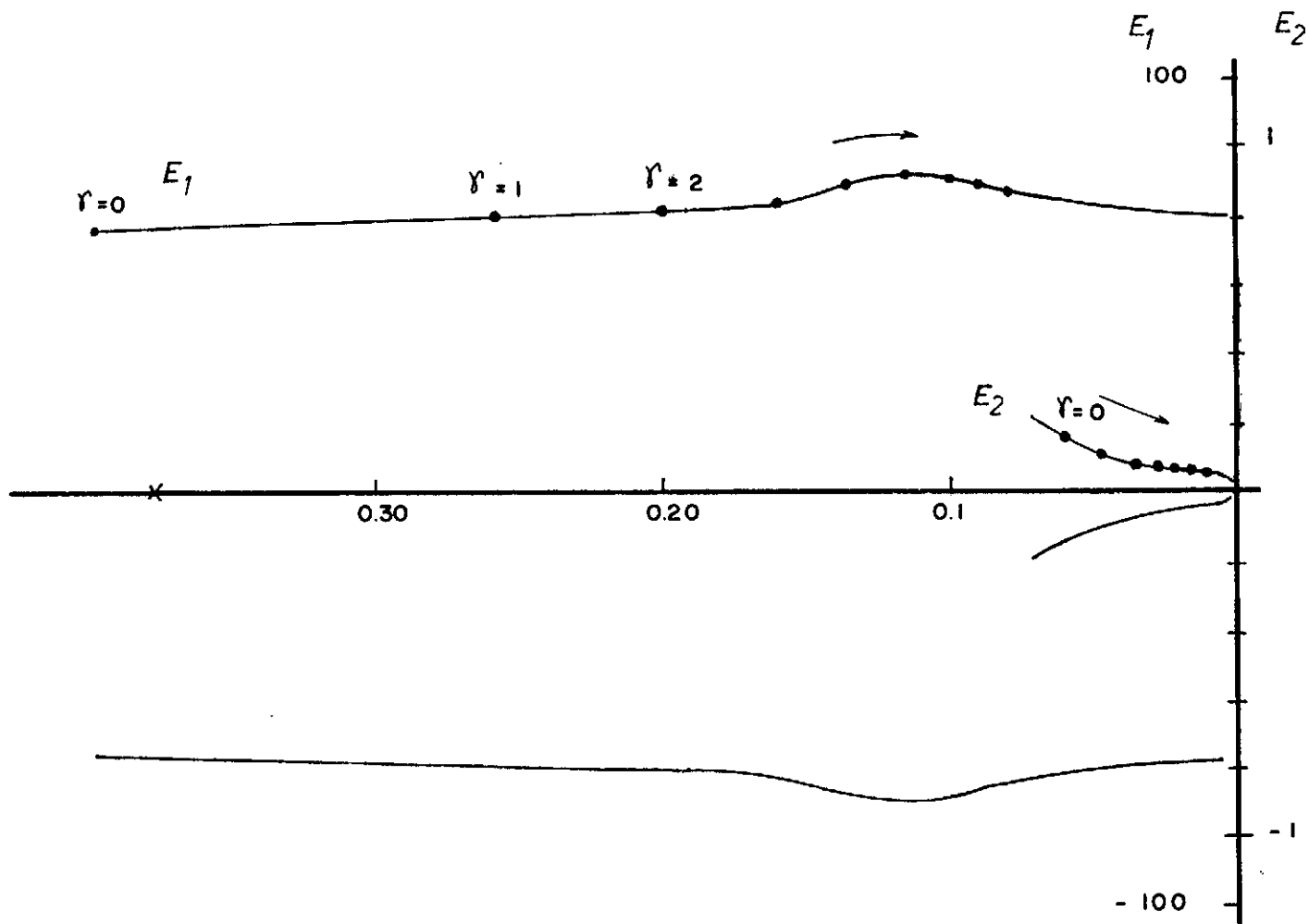


Fig. 5.5 Representación de las raíces del polinomio característico

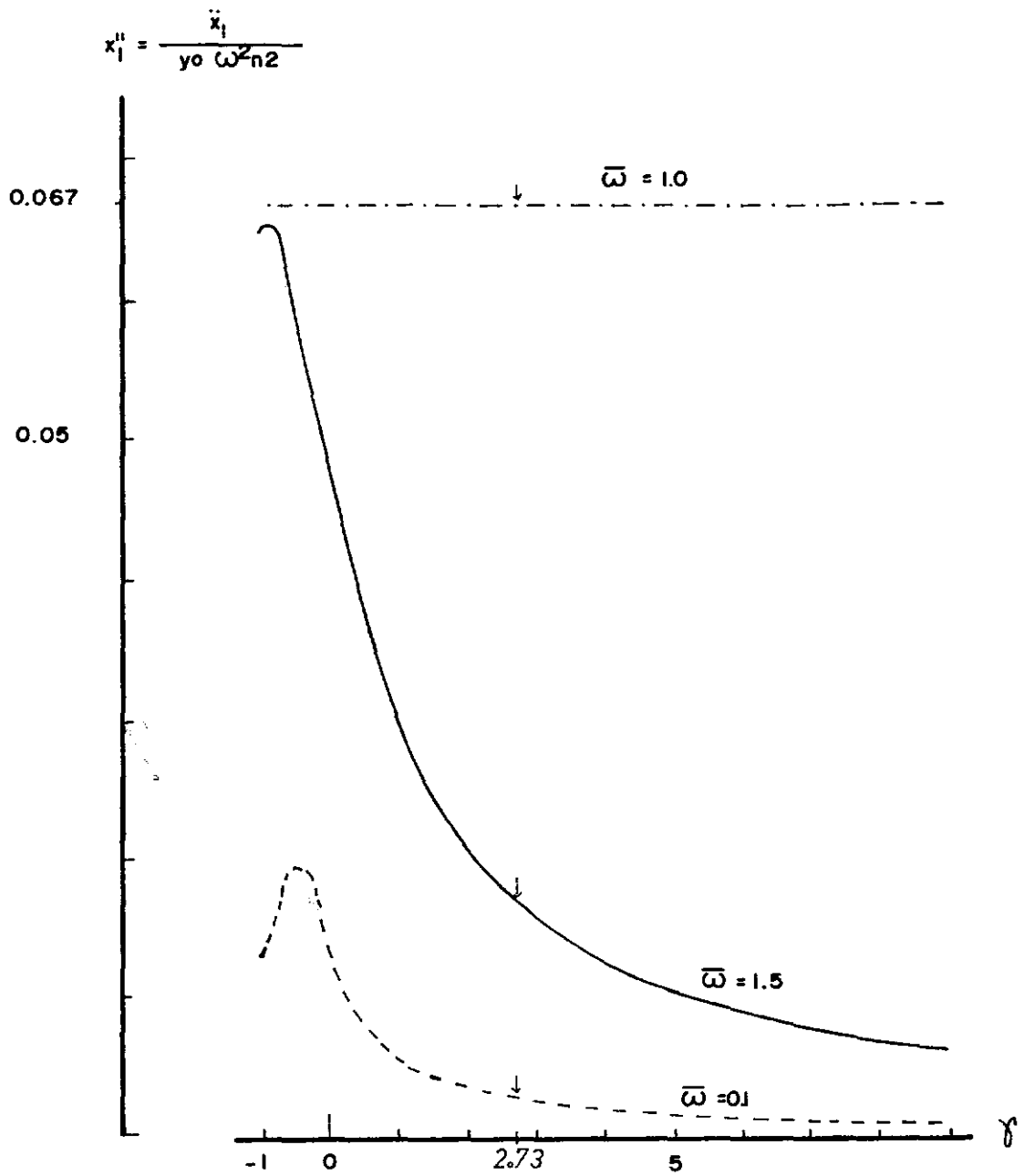


Fig. 6.4 Aceleración de M vs  $\delta$

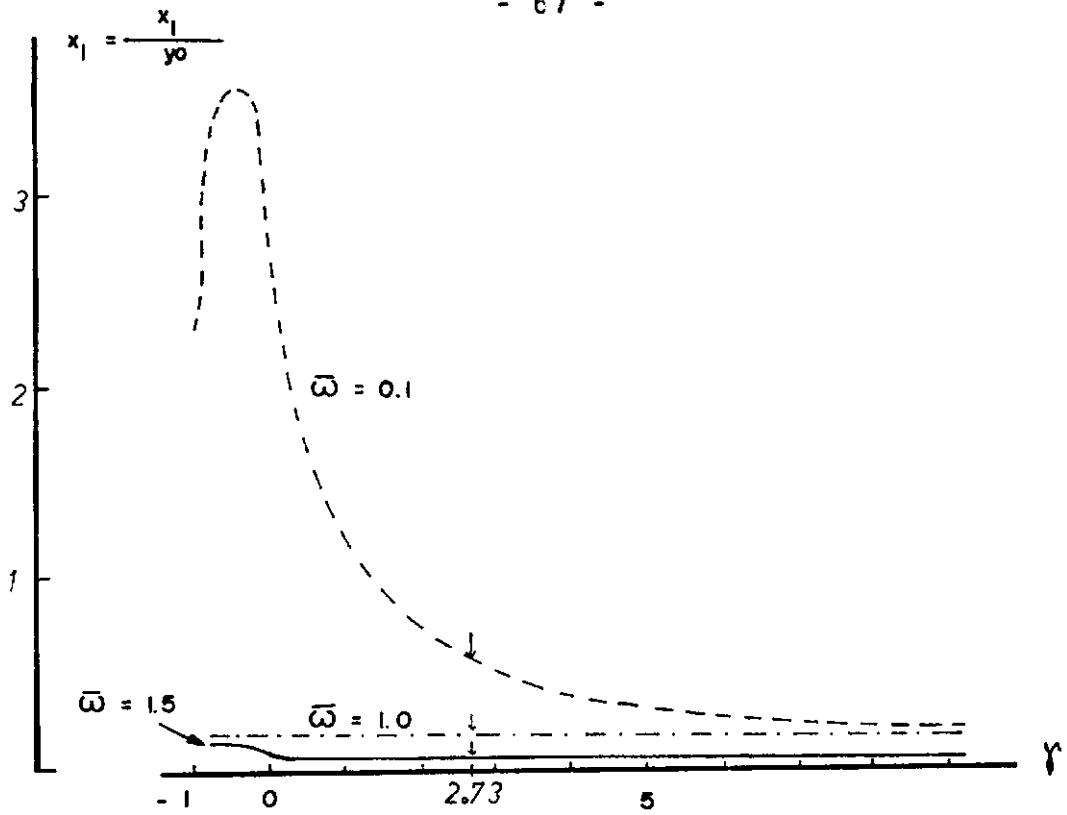


Figura 6.2 Desplazamiento de M vrs  $\gamma$

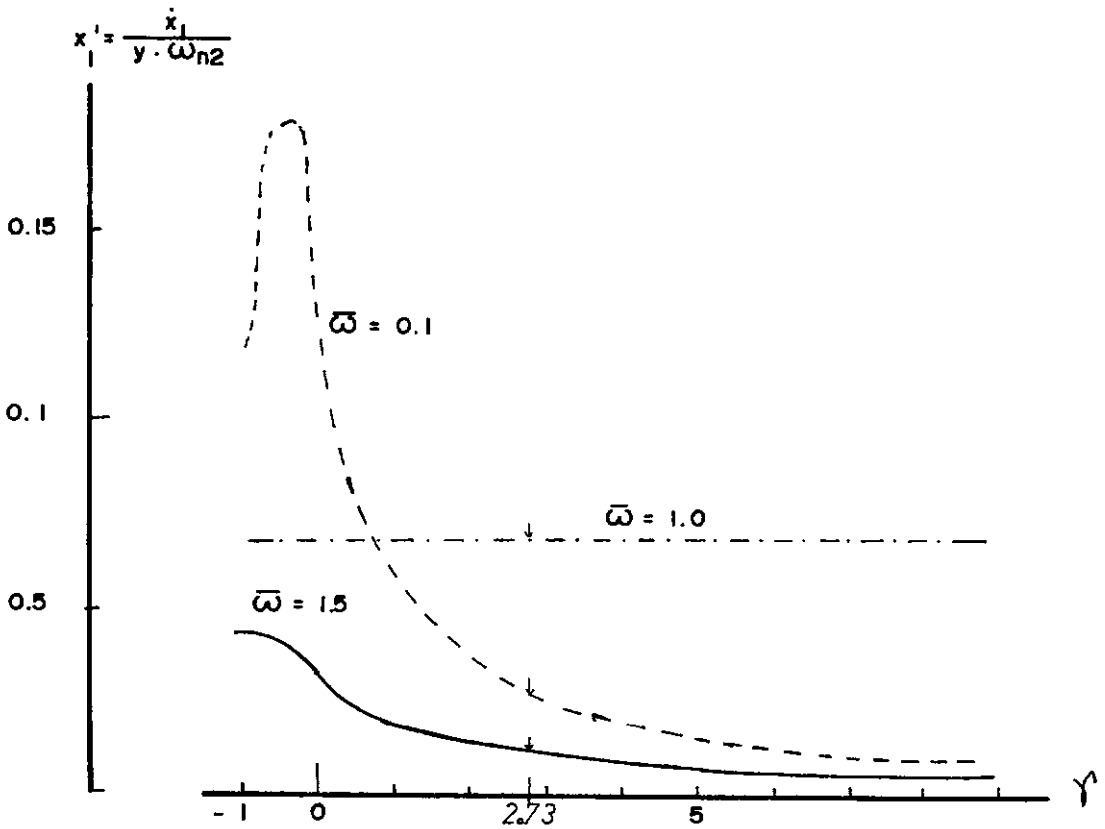


Fig. 6.3 Velocidad de M vrs  $\gamma$

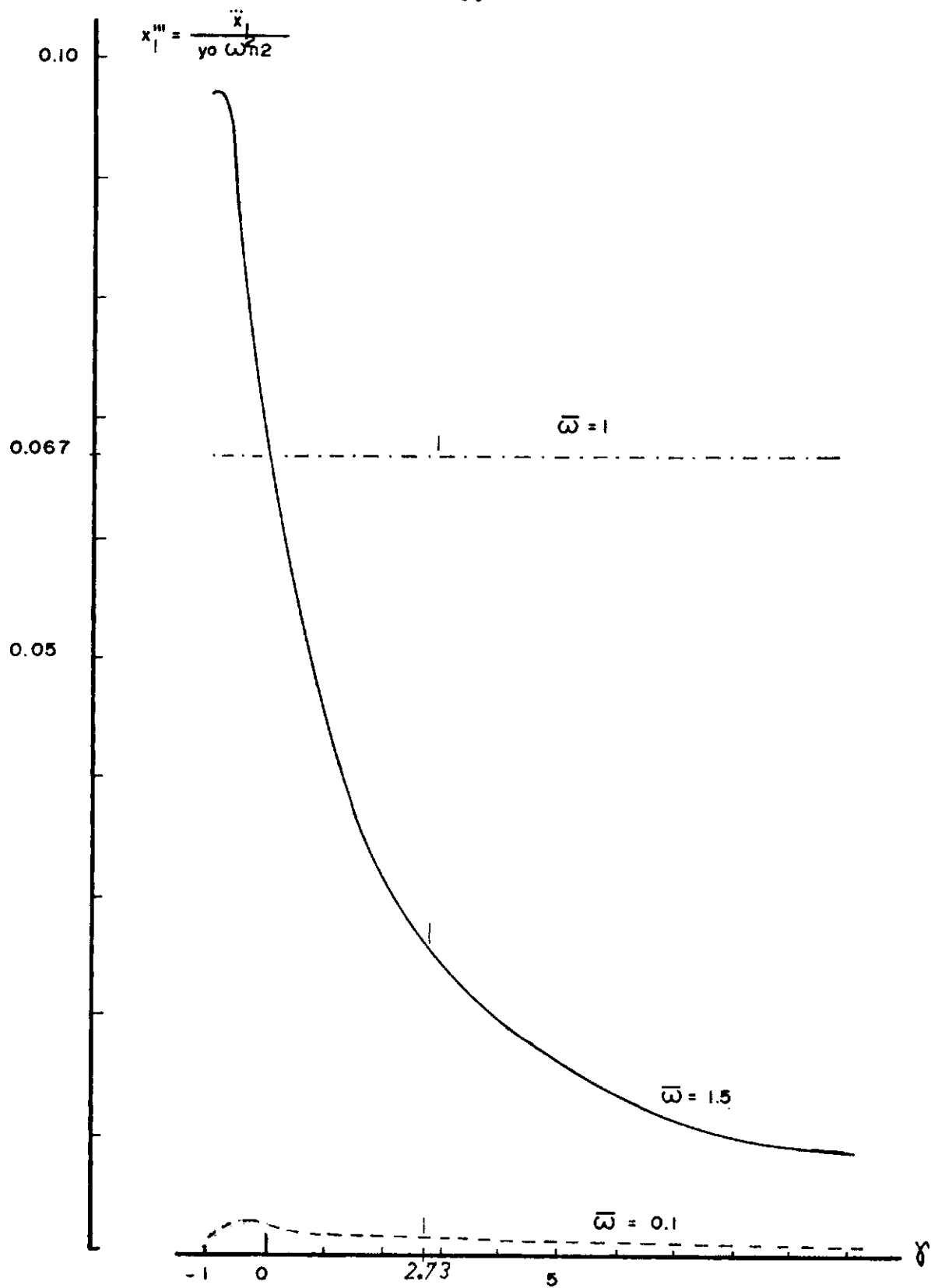


Fig. 6.5 "Jerk" de M vrs  $\gamma$



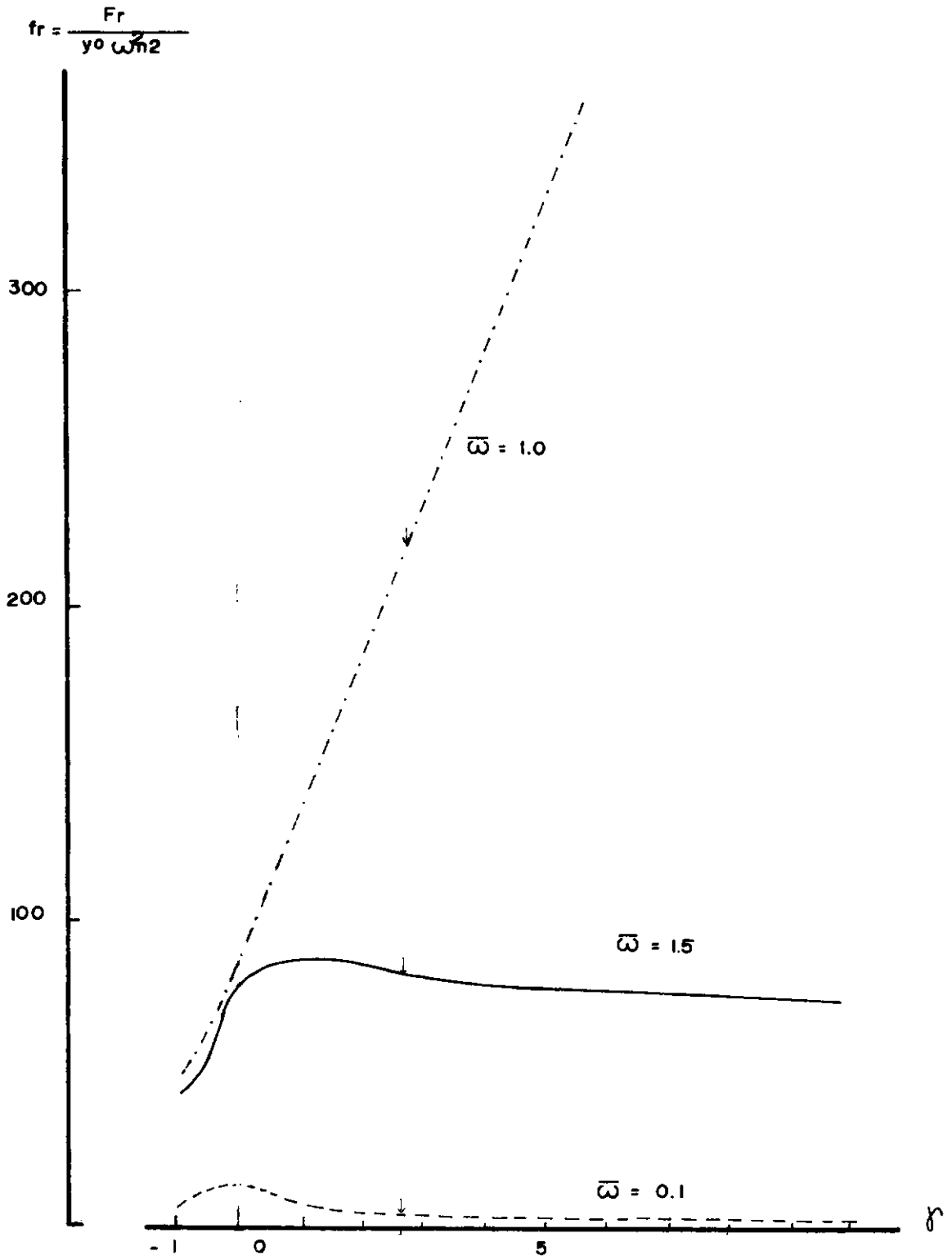


Fig. 6.6 Fuerza dinámica en la rueda vrs  $\delta$

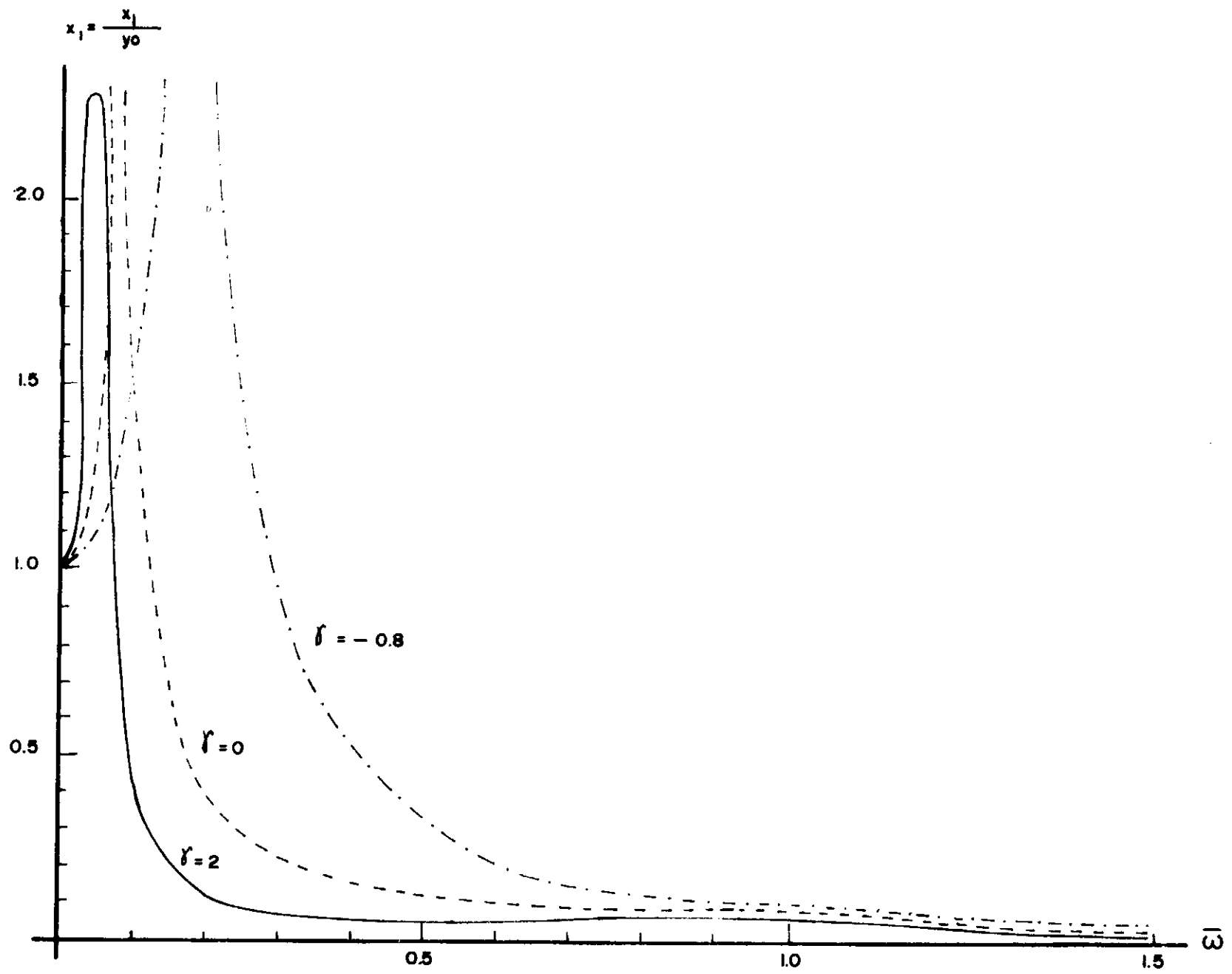


Fig. 6-7 Desplazamiento de M vrs  $\bar{\omega}$

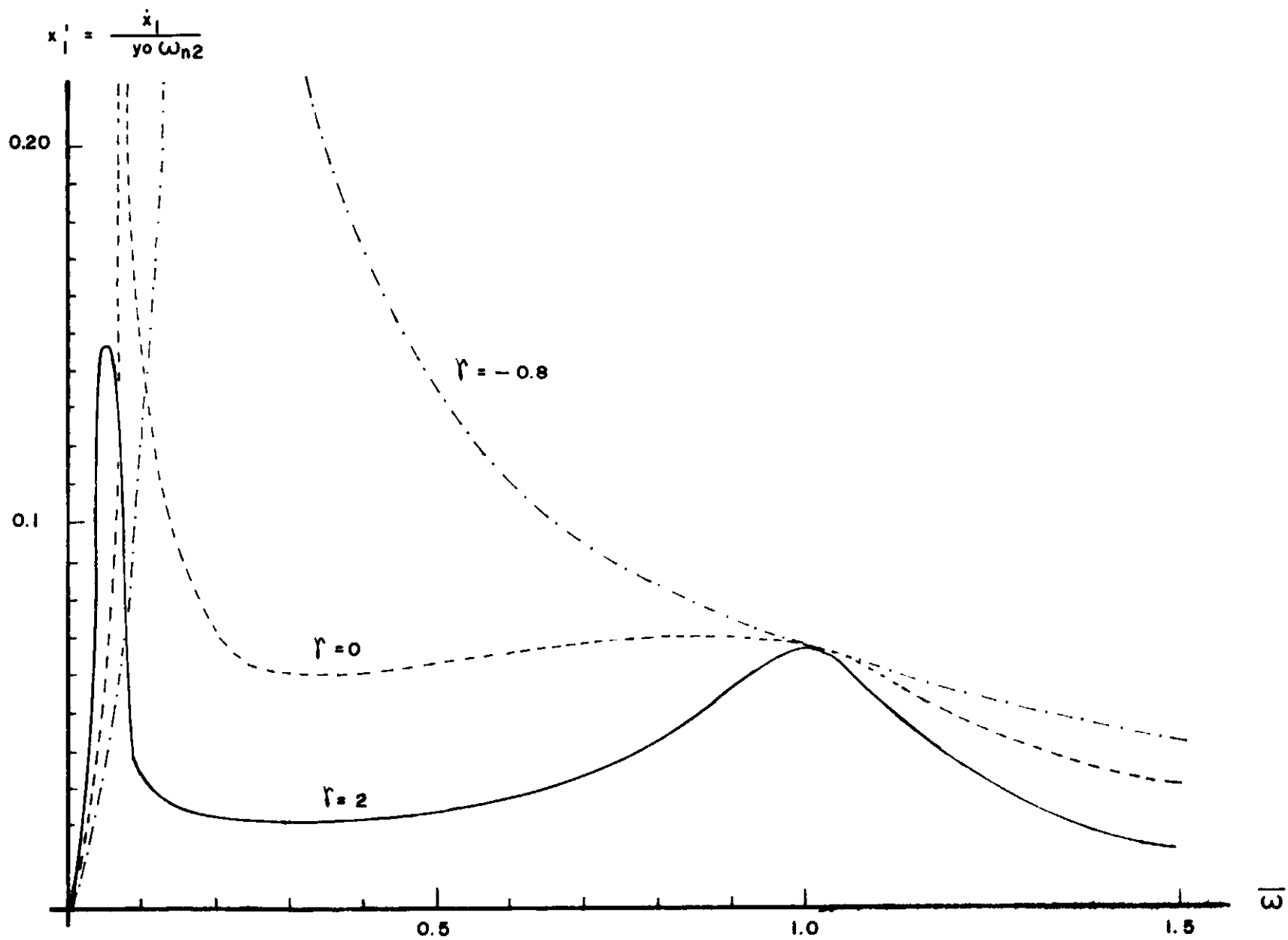
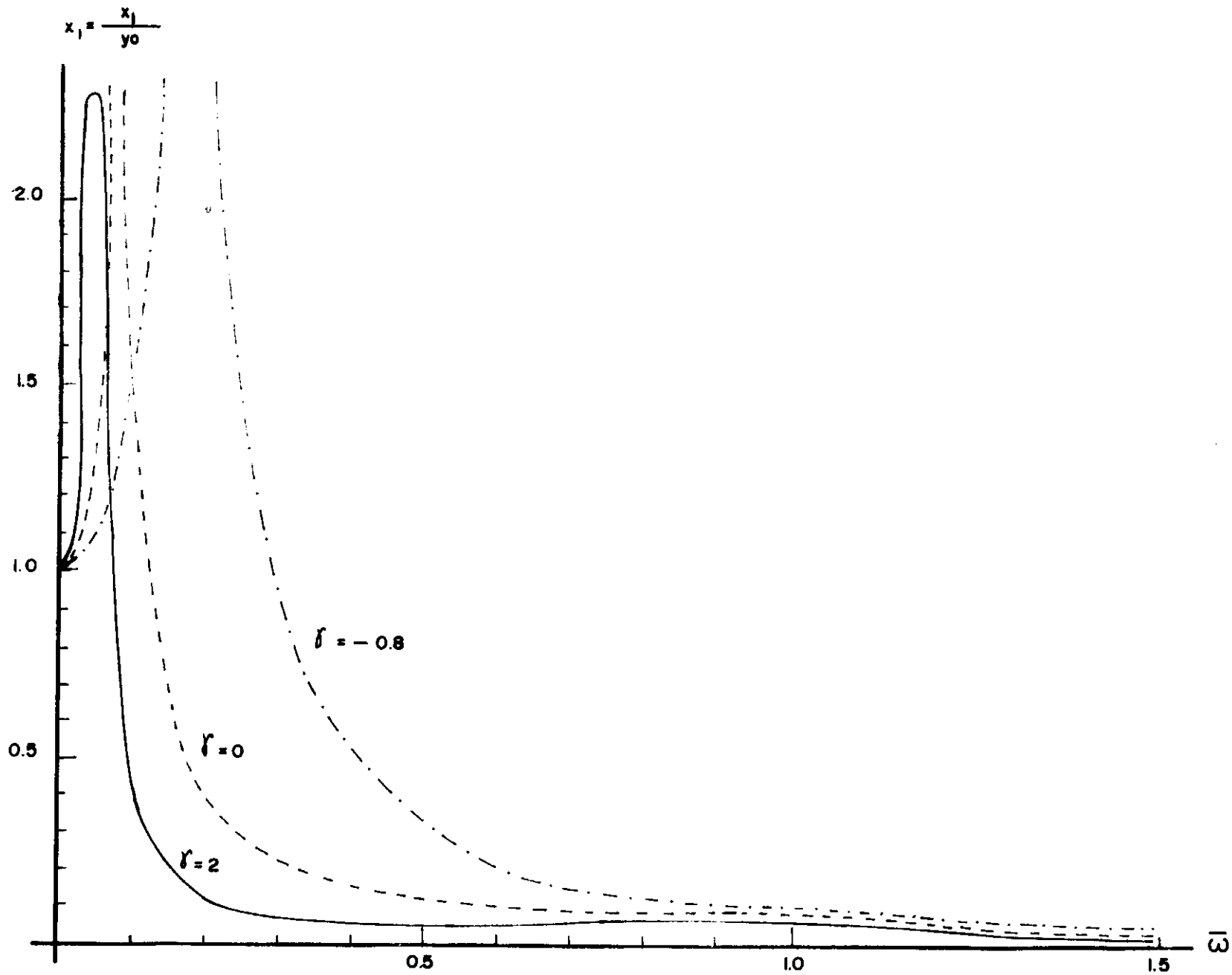


Fig. 6-8 Velocidad de M vrs  $\bar{\omega}$

Fig. 6-7 Desplazamiento de M vs  $\bar{\omega}$

$$x_1'' = \frac{\ddot{x}_1}{y_0 \omega_n^2}$$

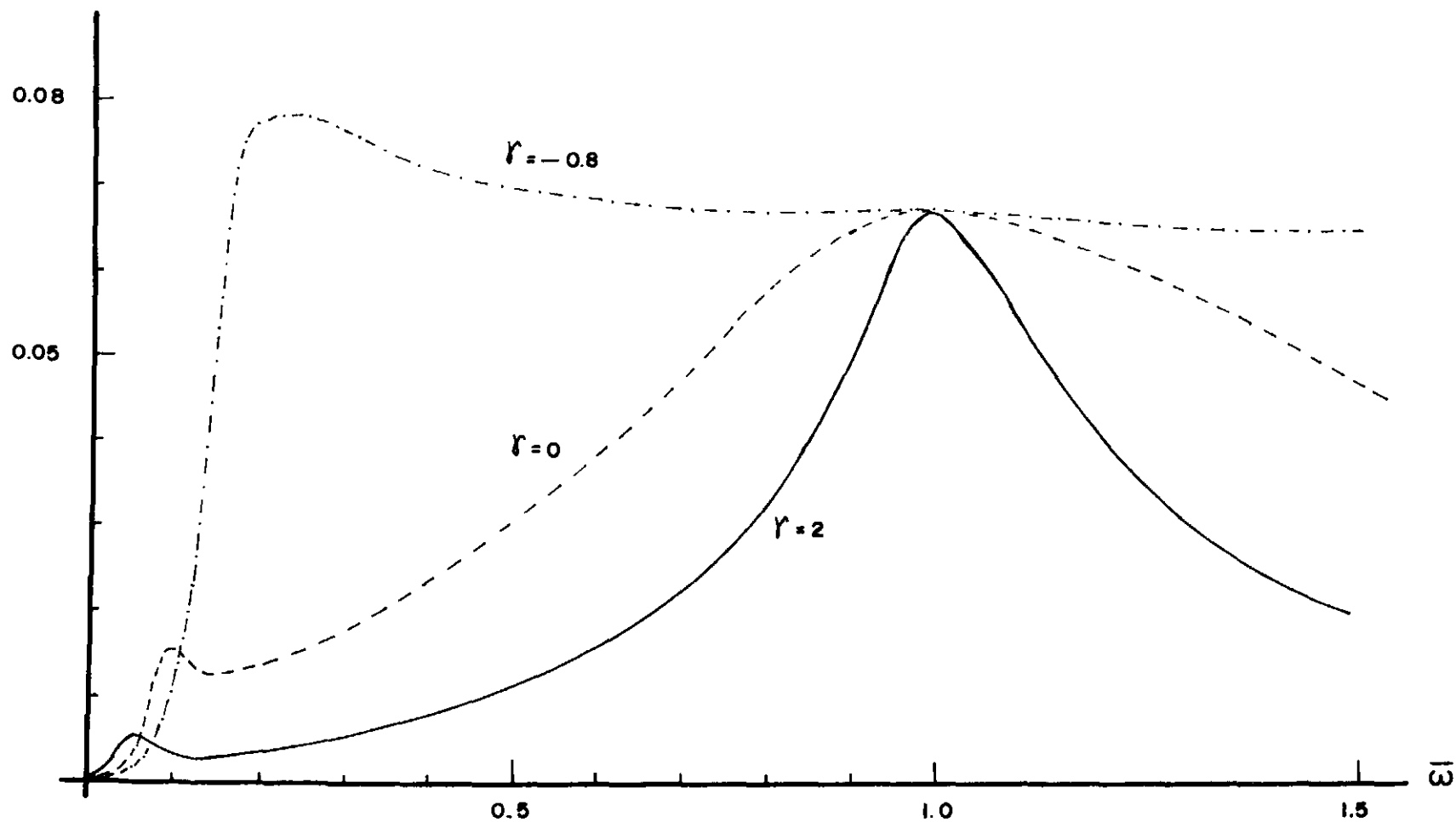


Fig. 6-9 Aceleración de M vrs  $\bar{\omega}$

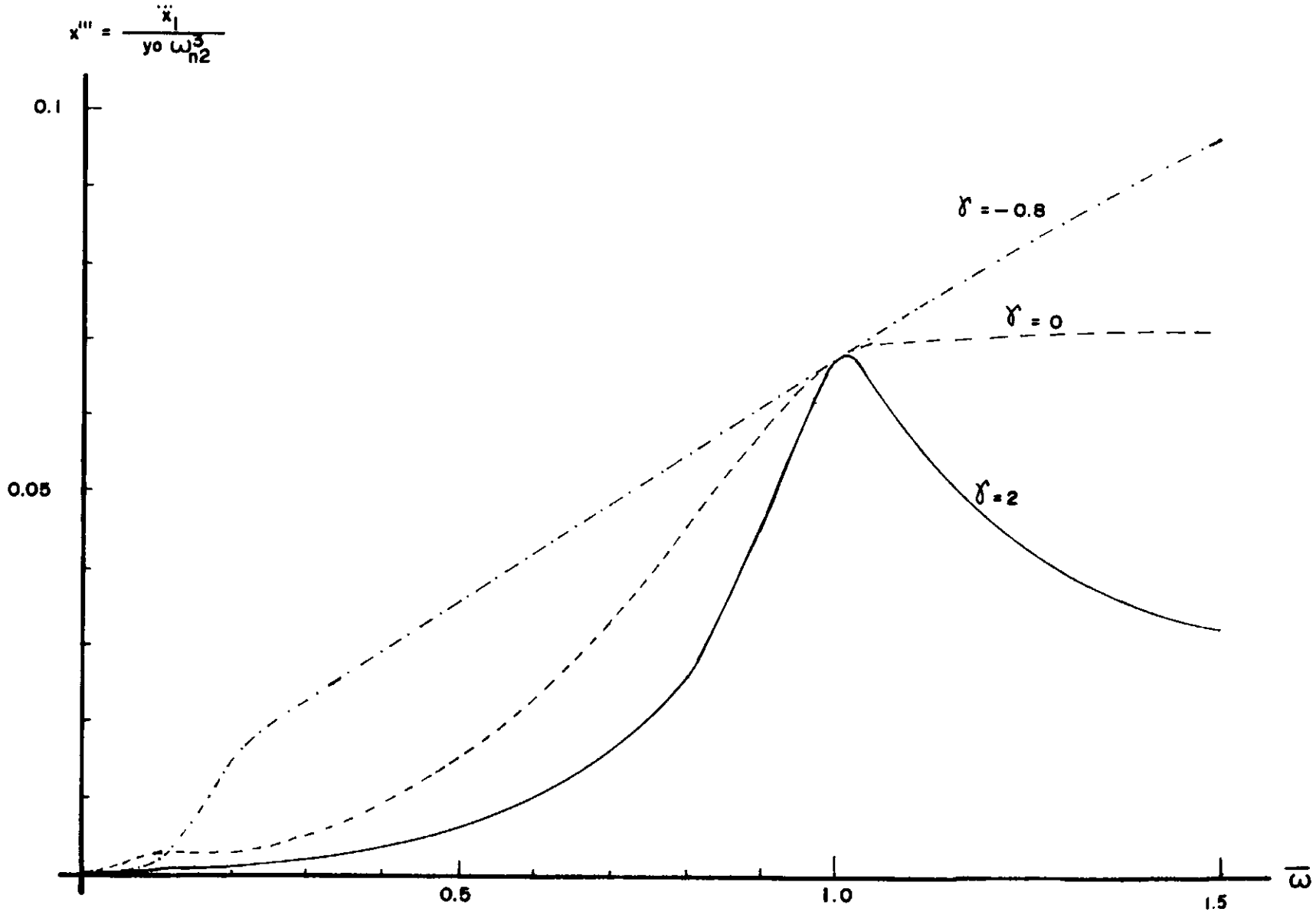


Fig. 6-10 "Jerk" vrs  $\bar{\omega}$

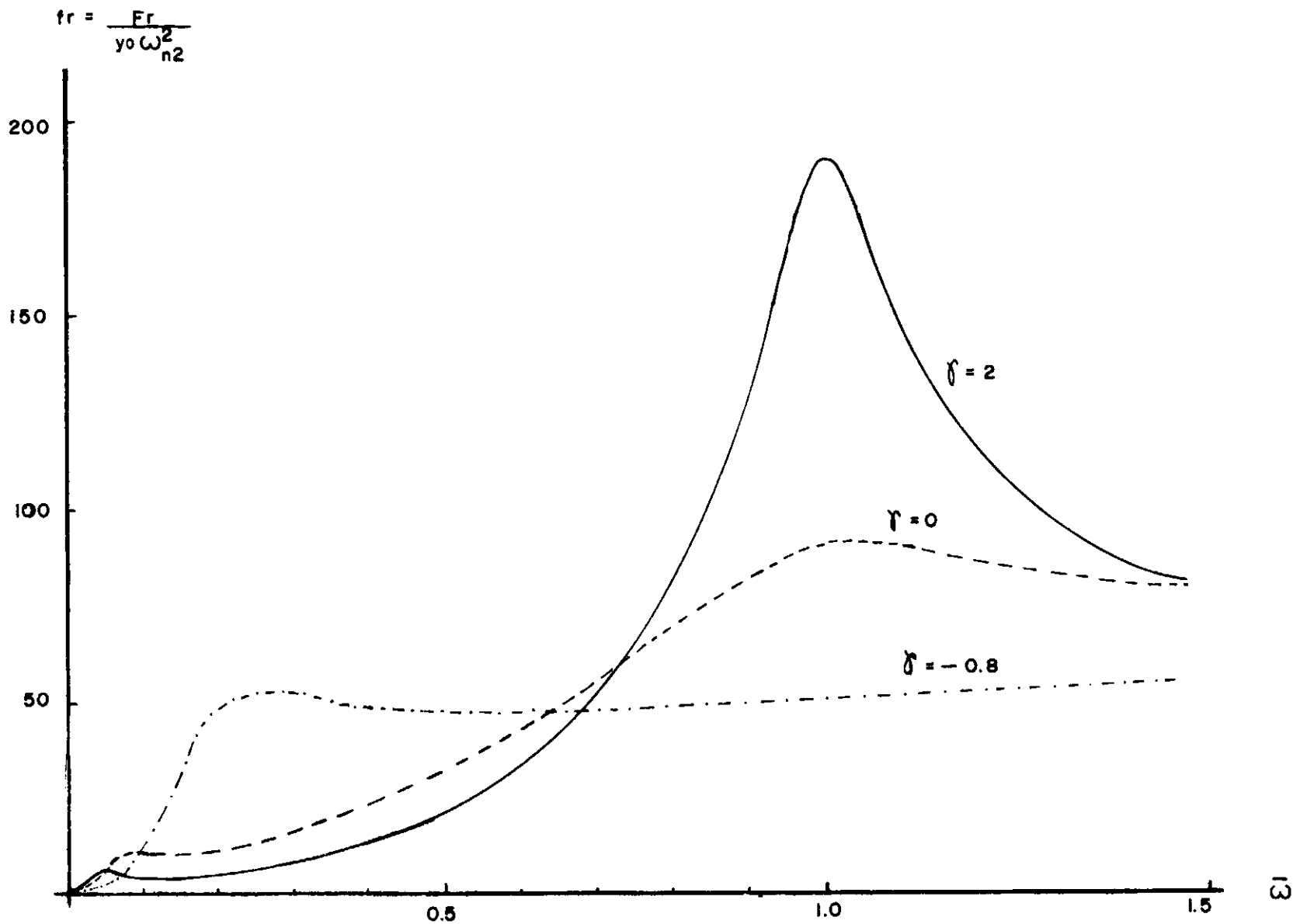


Fig. 6-11 Fuerza dinámica sobre la rueda vs  $\bar{\omega}$

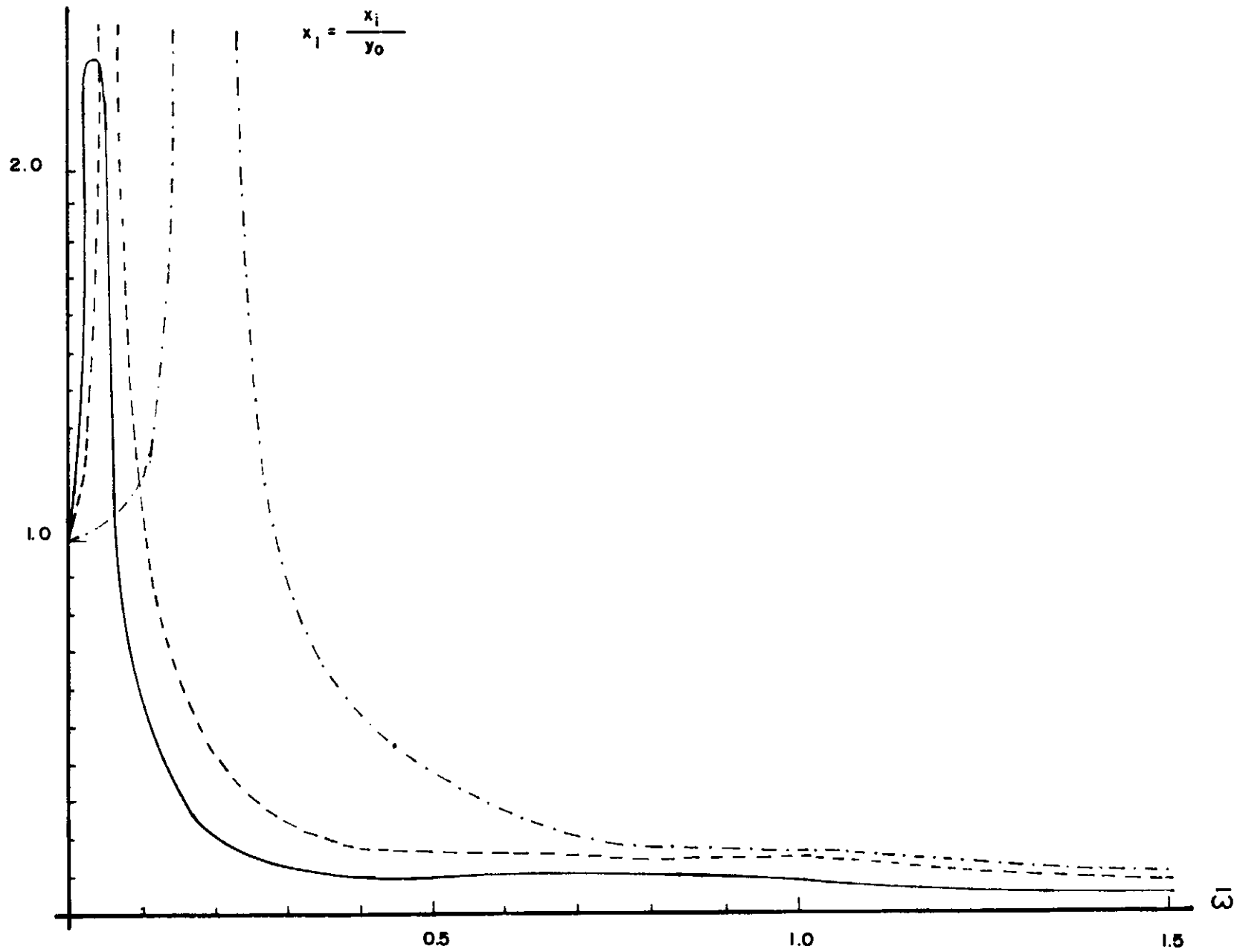


Fig 7-6 Desplazamiento de  $M$  vrs  $\bar{\omega}$  ( simulación )



$$x_1' = \frac{\dot{x}_1}{y_0 \omega_{n2}}$$

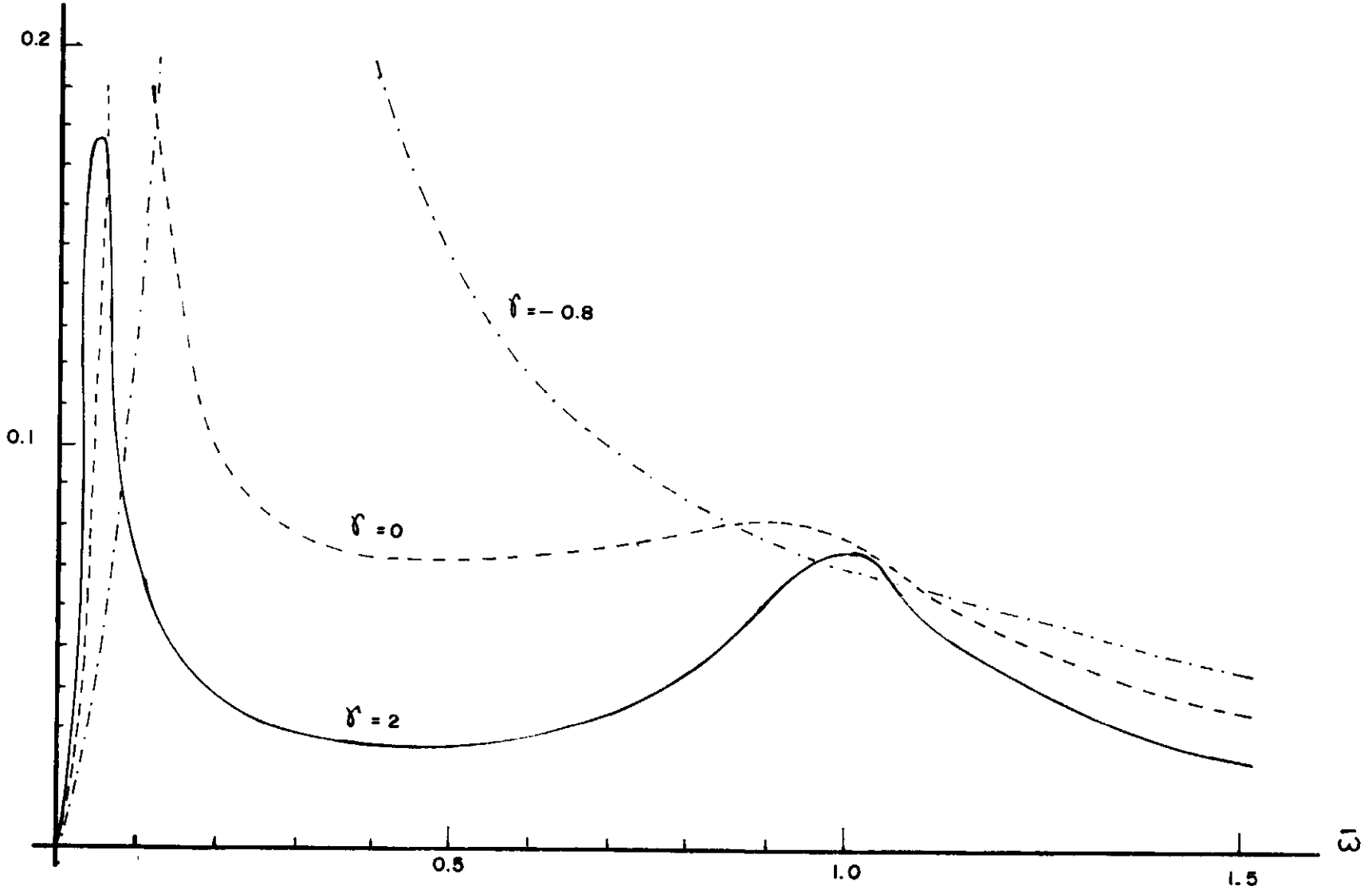


Fig. 7-7 Velocidad de M vrs  $\bar{\omega}$  (simulación)

$$x_1'' = \frac{\ddot{x}_1}{y_0 \omega_{n2}^2}$$

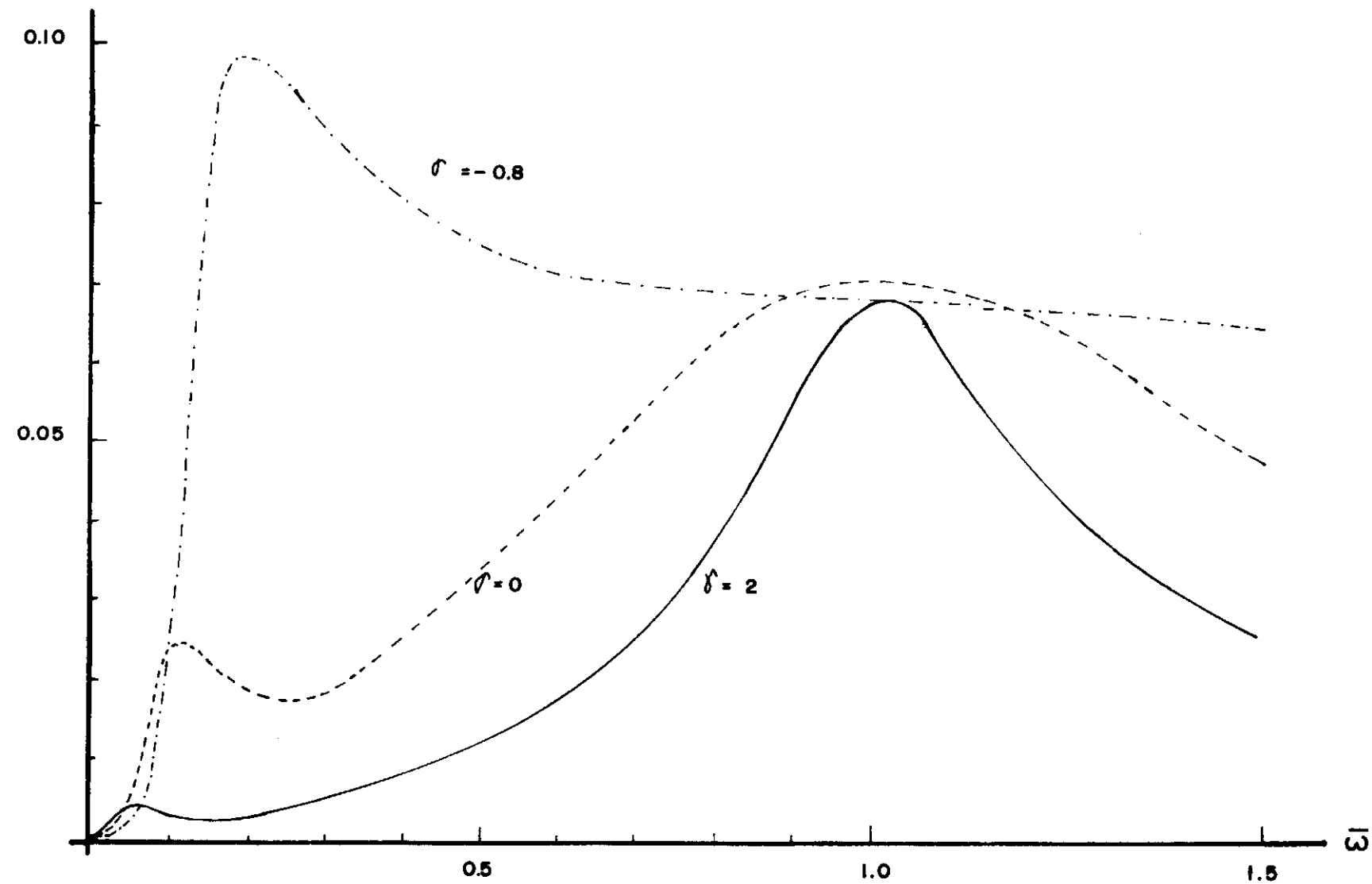


Fig. 7-8 Aceleración de M vs  $\bar{\omega}$  (simulación)

$$\ddot{x}_1''' = \frac{\ddot{x}_1}{y_0 \omega_{n2}^3}$$

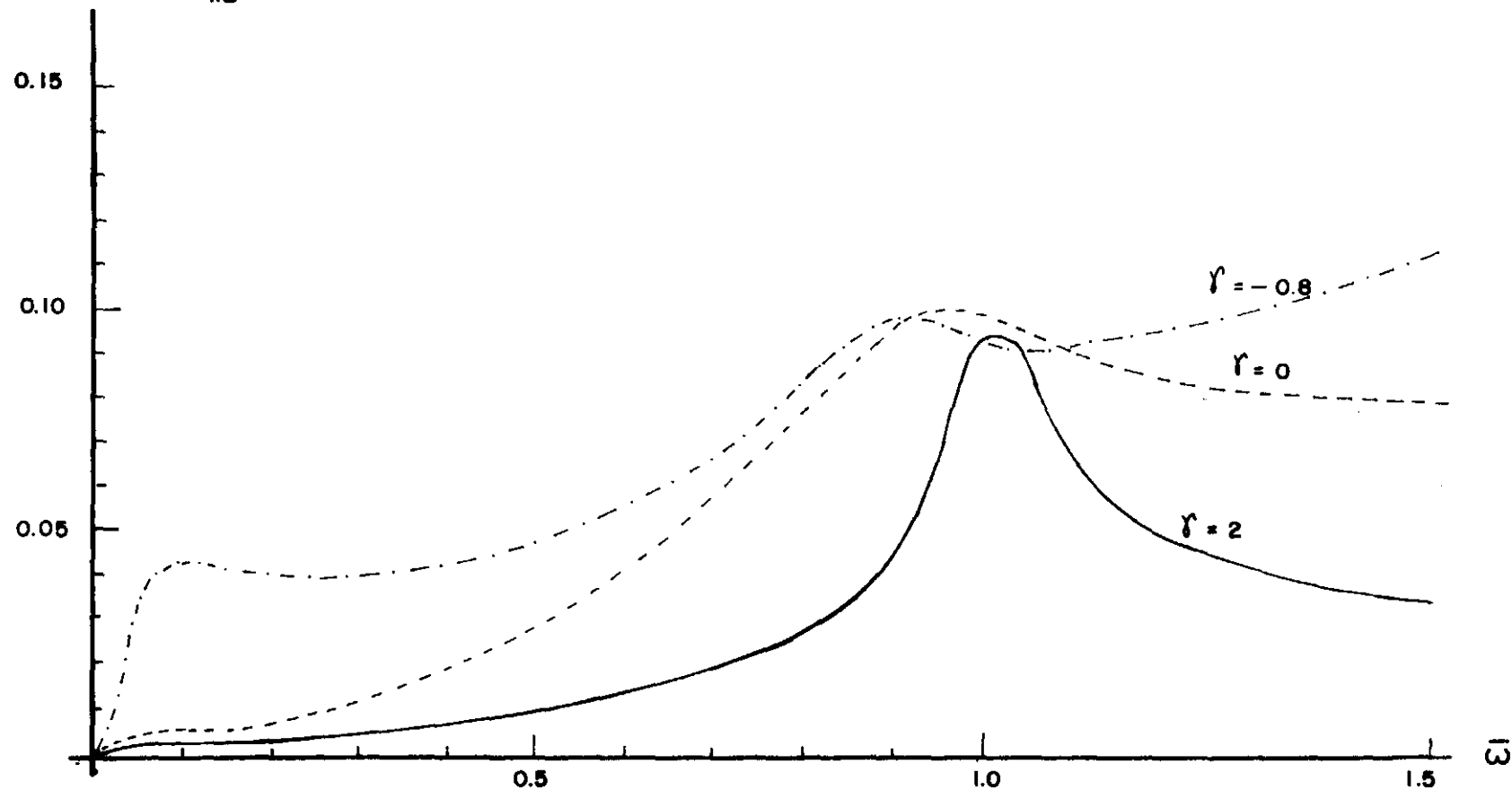


Fig. 7-9 "Jerk" vs  $\bar{\omega}$  (Simulación)

